



# CÁLCULO EM QUADRINHOS

Roteiro e Arte:

Larry Gonick

Blucher

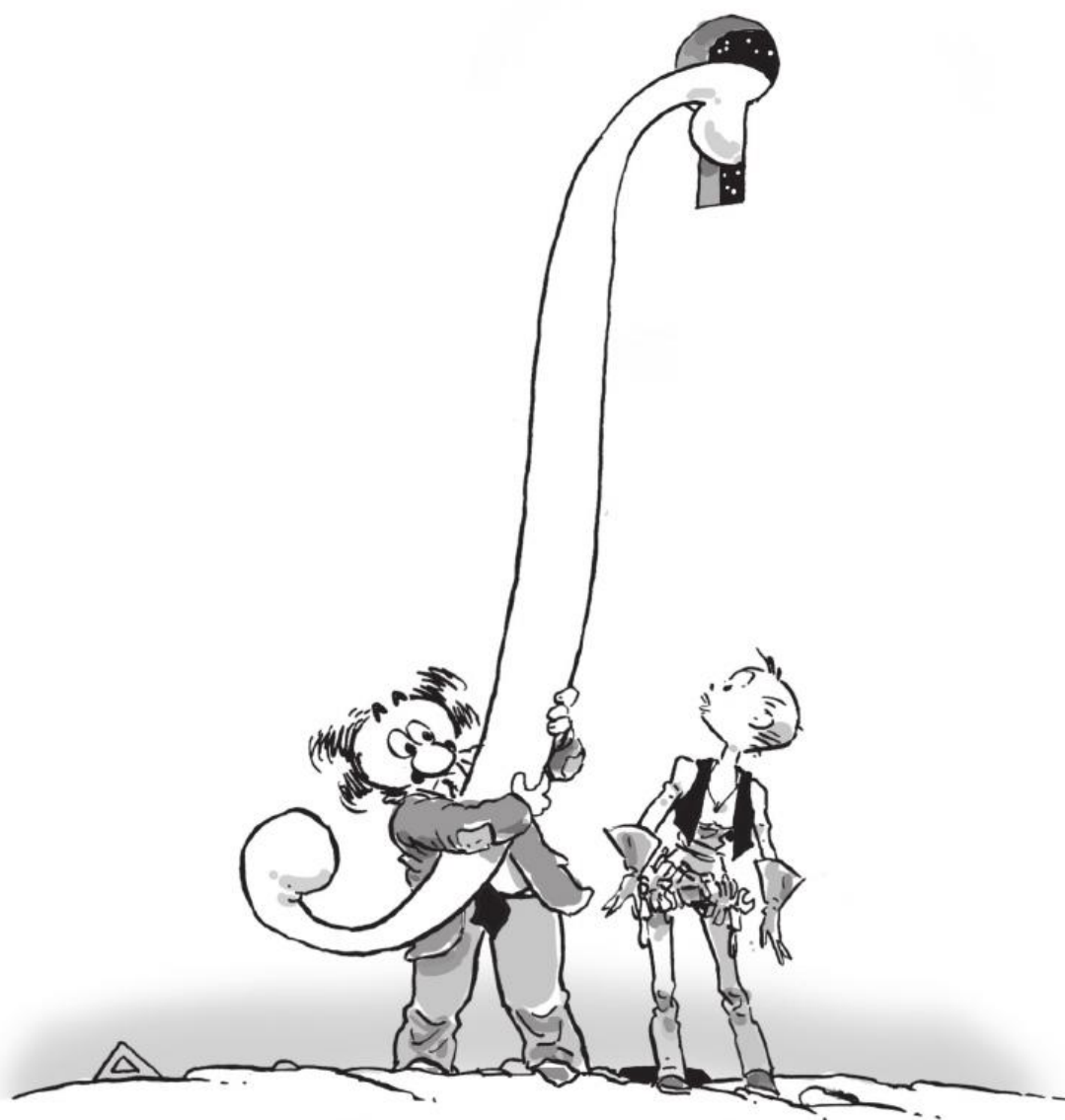


# CÁLCULO

## EM **QUADRINHOS**

**Blucher**

# **CÁLCULO** **EM QUADRINHOS**



Larry Gonick



Título original: *The Cartoon Guide to Calculus*  
© 2012 by Larry Gonick  
Publicado com a autorização da Harper Collins Publishers.  
2014 Editora Edgard Blücher Ltda.

# Blucher

---

Rua Pedroso Alvarenga, 1245, 4º andar  
04531-012 – São Paulo – SP – Brasil  
Tel.: 55 11 3078 5366  
contato@blucher.com.br  
www.blucher.com.br

Segundo Novo Acordo Ortográfico, conforme  
5ª ed. do *Vocabulário Ortográfico da Língua  
Portuguesa*. Academia Brasileira de Letras,  
março de 2009.

É proibida a reprodução total ou parcial por  
quaisquer meios, sem autorização escrita da  
Editora.

---

Todos os direitos reservados pela Editora Edgard  
Blücher Ltda.

## Ficha Catalográfica

---

Gonick, Larry  
Cálculo em quadrinhos / Larry Gonick; tradução  
de Marcelo Alves. — São Paulo: Blucher, 2014.

ISBN 978-85-212-0829-7  
Título original: *The Cartoon Guide to Calculus*

1. Cálculo 2. História em quadrinhos I. Título

---

14-0326

CDD 515.1

---

Índices para catálogo sistemático:  
1. Cálculo

# CONTEÚDO

---

AGRADECIMENTOS .....	6
CONDIÇÕES INICIAIS .....	8
CAPÍTULO - 1 .....	9
VELOCIDADE ESCALAR, VELOCIDADE, MUDANÇA	
CAPÍTULO 0 .....	19
APRESENTANDO AS FUNÇÕES	
CAPÍTULO 1 .....	61
LIMITES	
CAPÍTULO 2 .....	85
A DERIVADA	
CAPÍTULO 3 .....	109
CADEIA, CADEIA, CADEIA	
CAPÍTULO 4 .....	125
USANDO DERIVADAS, PARTE 1: TAXAS RELACIONADAS	
CAPÍTULO 5 .....	133
USANDO DERIVADAS, PARTE 2: OTIMIZAÇÃO	
CAPÍTULO 6 .....	153
ATUANDO LOCALMENTE	
CAPÍTULO 7 .....	163
O TEOREMA DO VALOR MÉDIO	
CAPÍTULO 8 .....	169
APRESENTANDO A INTEGRAL	
CAPÍTULO 9 .....	177
PRIMITIVAS	
CAPÍTULO 10 .....	185
A INTEGRAL DEFINIDA	
CAPÍTULO 11 .....	195
FUNDAMENTALMENTE...	
CAPÍTULO 12 .....	203
INTEGRAIS QUE MUDAM DE FORMA	
CAPÍTULO 13 .....	213
USANDO INTEGRAIS	
CAPÍTULO 14 .....	237
O QUE VEM DEPOIS?	
ÍNDICE .....	241

---

## AGRADECIMENTOS

O DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE HARVARD, EM OUTRA ÉPOCA, ENCHEU A CABEÇA DO AUTOR COM ESTE NEGÓCIO: JOHN TATE, MEU PRIMEIRO PROFESSOR DE CÁLCULO, LYNN LOOMIS, SHLOMO STERNBERG, RAOUL BOTT, DAVID MUMFORD, BARRY MAZUR, ANDREW GLEASON, LARS AHLFORS E GEORGE MACKEY, CUJO FILHO FUNDOU A CADEIA DE MERCADOS WHOLE FOODS, FONTE DE MUITO DO CHOCOLATE QUE ME ABASTECEU DURANTE A ESCRITA DESTES LIVROS. INDO PARA O MIT, VICTOR GUILLEMIN ORIENTOU A MINHA JAMÁS FINALIZADA TESE, E NAGISETTY RAO DO INSTITUTO TATA EM MUMBAI ME ENSINOU A APRECIAR A ANÁLISE “PÉ NO CHÃO” SEM MUITA ÁLGEBRA. MAIS RECENTEMENTE, UM CONJUNTO DE PESSOAS ME AJUDOU A PENSAR NOVAMENTE A RESPEITO DO CÁLCULO: JAMES MAGEE EXAMINOU COM CUIDADO OS PRIMEIROS CAPÍTULOS E FEZ COM QUE ME MANTIVESSE PRÓXIMO AO CURRÍCULO; ALGUMAS DISCUSSÕES VIGOROSAS COM DAVID MUMFORD ESCLARECERAM QUESTÕES SOBRE RIGOR E INTUIÇÃO; CRAIG BENHAM, ANDREW MOSS E MARK WHEELIS AGUENTARAM MEUS DISCURSOS SOBRE VELOCÍMETROS, EIXOS PARALELOS E VÁRIOS ASSUNTOS RELACIONADOS. AGRADEÇO A TODOS E, ESPECIALMENTE, ÀS PESSOAS QUE CRIARAM O FONTGRAPHER, ESTE SOFTWARE MARAVILHOSO QUE TORNOU POSSÍVEL A COMPOSIÇÃO DO TEXTO MATEMÁTICO DE MODO “MANUSCRITO”!

PARA DAVID MUMFORD,  
MENTOR, BENEMÉRITO E AMIGO





# CONDIÇÕES INICIAIS



# **CAPÍTULO - 1**

# **VELOCIDADE ESCALAR, VELOCIDADE, MUDANÇA**

IDEIA BÁSICA Nº 1

CÁLCULO É A MATEMÁTICA DA MUDANÇA, E ESTA É MISTERIOSA. ALGUMAS COISAS CRESCEM IMPERCEPTIVELMENTE... OUTRAS NÃO... O CABELO CRESCE LENTAMENTE E É CORTADO SUBITAMENTE... TEMPERATURAS SOBEM E DESCEM... A FUMAÇA FORMA ROLOS NO AR... OS PLANETAS GIRAM NO ESPAÇO... E O TEMPO, O TEMPO NUNCA PARA...





PENSE BEM SOBRE AS MUDANÇAS E VOCÊ PODERÁ CHEGAR A ALGUMAS CONCLUSÕES UM POUCO ESTRANHAS. POR EXEMPLO, NA GRÉCIA ANTIGA, **ZENÃO DE ELEIA** PENSOU A RESPEITO DA MUDANÇA E SE CONVENÇEU QUE O **MOVIMENTO É IMPOSSÍVEL**. SEU RACIOCÍNIO ERA MAIS OU MENOS ESTE:





NO FINAL DOS ANOS 1600, MAIS OU MENOS 2000 ANOS DEPOIS DE ZENÃO, DOIS OUTROS SUJEITOS TIVERAM UMA IDEIA DIFERENTE.

NA VERDADE, EU TIVE A IDEIA E **VOCÊ** ROUBOU!

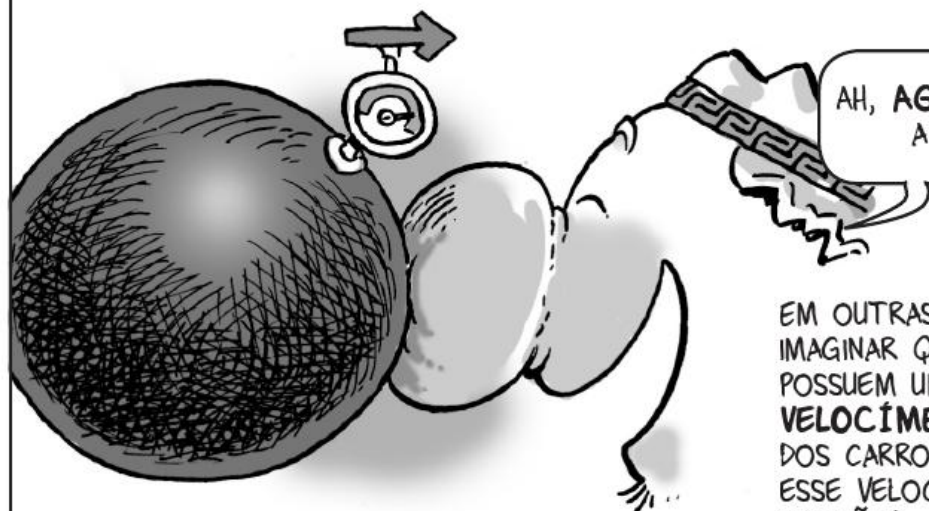
**VOCÊ** TIROU AS PALAVRAS DA MINHA BOCA...



**ISAAC NEWTON E GOTTFRIED LEIBNIZ** ENXERGARAM O PROBLEMA DESTA FORMA: AINDA QUE UMA BALA DE CANHÃO EM MOVIMENTO NÃO VÁ A LUGAR ALGUM EM DETERMINADO INSTANTE, AINDA HÁ **ALGO** QUE INDICA O MOVIMENTO.



ESTE ALGO É A **VELOCIDADE**, UM NÚMERO. VOCÊ PODE DIZER QUE TODO OBJETO CARREGA CONSIGO UM INDICADOR INVISÍVEL QUE MOSTRA A INTENSIDADE E A DIREÇÃO DE SUA VELOCIDADE EM TODOS OS INSTANTES.



AH, **AGORA** EU COMEÇO A ENXERGAR...

EM OUTRAS PALAVRAS, PODEMOS IMAGINAR QUE TODAS AS COISAS POSSUEM UMA ESPÉCIE DE **VELOCÍMETRO**, TAL COMO AQUELE DOS CARROS (EXCETO PELO FATO DE ESSE VELOCÍMETRO TAMBÉM INDICAR A DIREÇÃO).

# CAPÍTULO 0

## APRESENTANDO AS FUNÇÕES

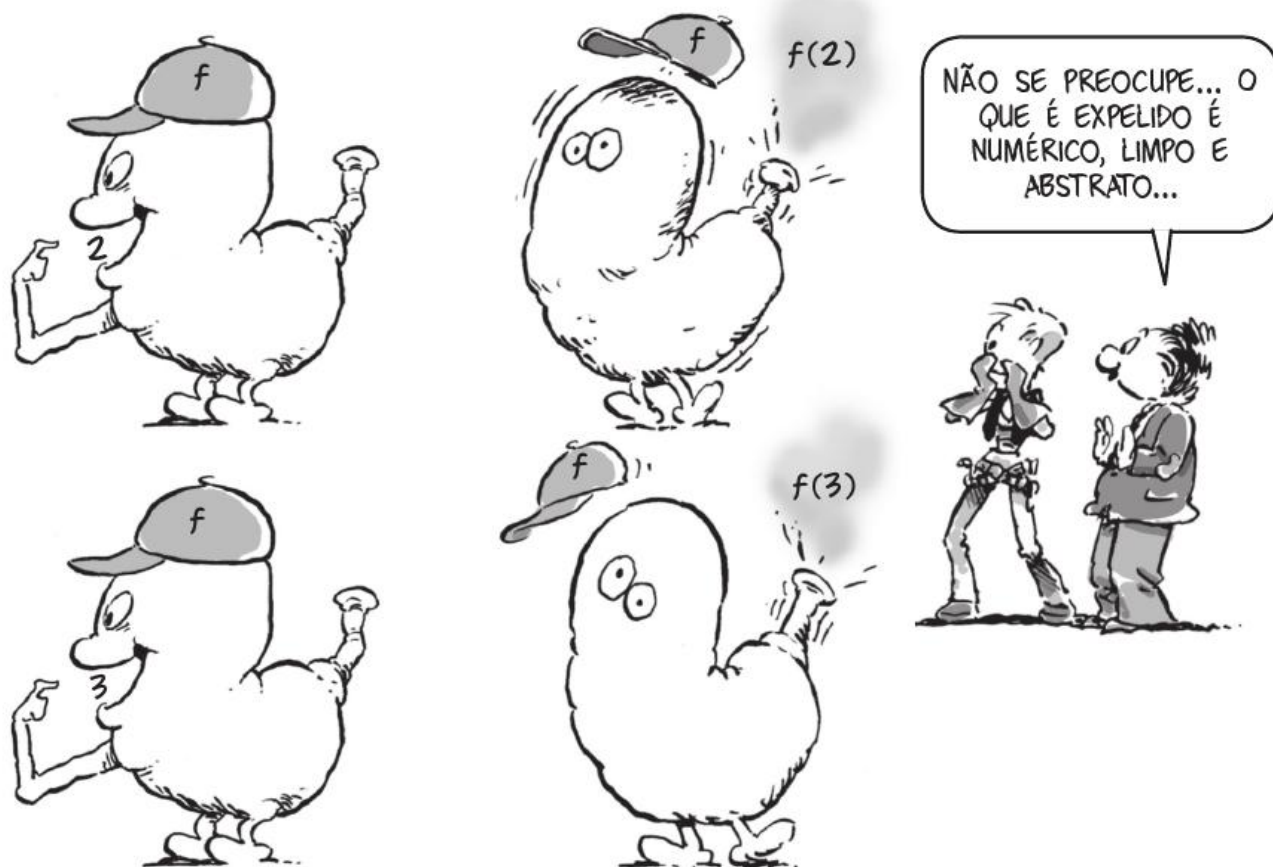
NO QUAL APRENDEREMOS ALGO SOBRE RELACIONAMENTOS

COMEÇAMOS COM UMA DAS IDEIAS MAIS BELAS E FECUNDAS DA MATEMÁTICA MODERNA: A **FUNÇÃO**. TUDO NESTE LIVRO SERÁ SOBRE FUNÇÕES. ASSIM... O QUE É UMA FUNÇÃO?

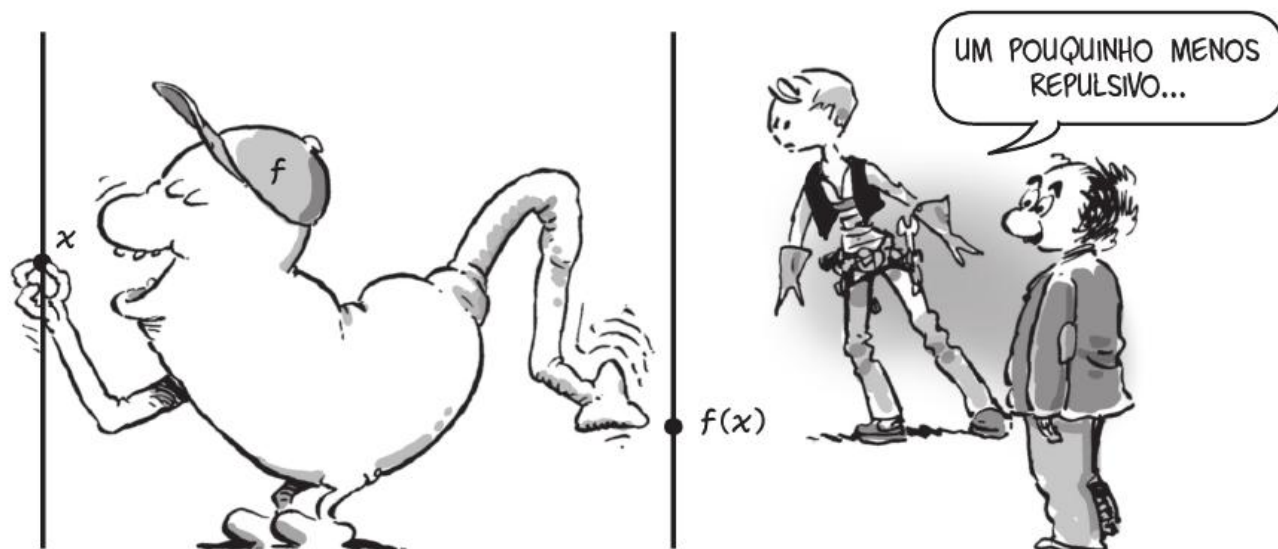




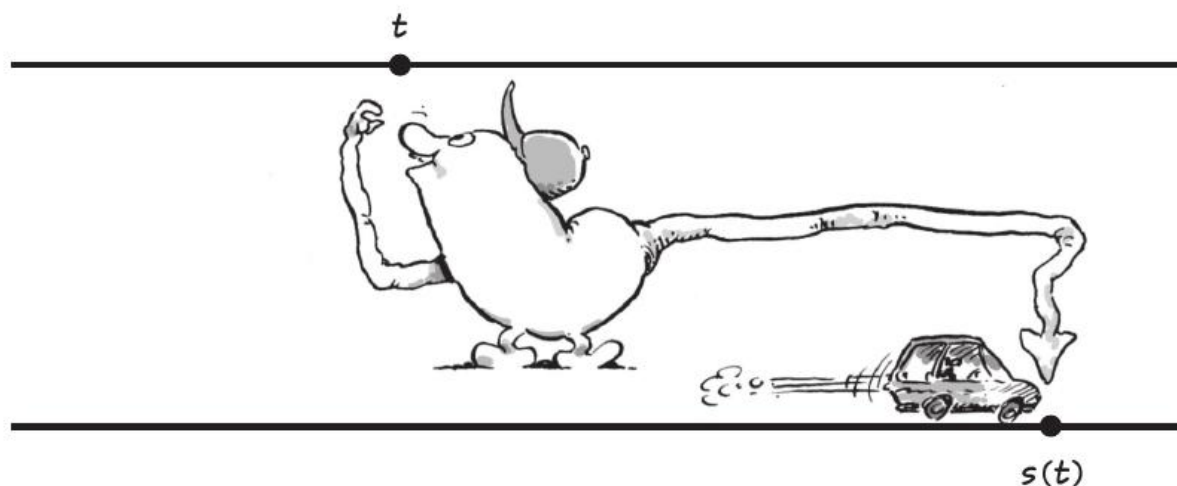
UMA FUNÇÃO É UMA ESPÉCIE DE **CAIXA-PRETA COM ENTRADA E SAÍDA** OU UM **PROCESSADOR DE NÚMEROS**. UMA FUNÇÃO (DENOMINAMOS  $f$ ) ENGOLE E EXPELE NÚMEROS DE MODO ESPECÍFICO. PARA CADA NÚMERO ENGOLIDO (DENOMINAMOS  $x$ ),  $f$  EXPELE UM NÚMERO ÚNICO, SINGULAR,  $f(x)$ , PRONUNCIADO "EFE DE XIS".  $f$  É COMO UMA REGRA QUE TRANSFORMA  $x$  EM  $f(x)$ . ENTRA  $x$ , SAI  $f(x)$ .



SE VOCÊ NÃO GOSTA QUE O EXPELIDO FIQUE VAGANDO PELO AR COMO GÁS DO PÂNTANO, ENTÃO, PENSE NOS NÚMEROS COMO SE ELES ESTIVESSEM DISPOSTOS NUMA LINHA RETA. NESTE CASO, VOCÊ PODE IMAGINAR UMA FUNÇÃO  $f$  ENGOLINDO NÚMEROS DE UMA LINHA E MERAMENTE **APONTANDO** PARA OS VALORES CORRESPONDENTES DE SAÍDA NUMA OUTRA LINHA.



POR EXEMPLO, A POSIÇÃO  $s$  DE UM CARRO É UMA FUNÇÃO DO TEMPO  $t$ . VOCÊ PODE PENSAR EM  $s$  COMO LENDO O TEMPO (OU ENGOLINDO ESTE COMO ENTRADA) DE UMA LINHA E APONTANDO PARA A POSIÇÃO  $s(t)$  DO CARRO NUMA PISTA.



## MAIS EXEMPLOS:

O MUNDO ESTÁ CHEIO DE FUNÇÕES!



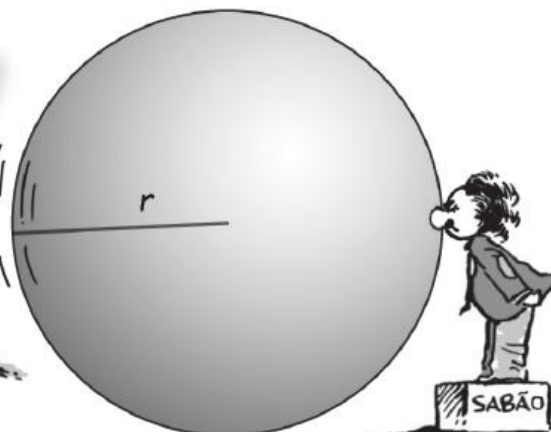
A PRESSÃO ATMOSFÉRICA DEPENDE DA ALTITUDE: PARA CADA ALTITUDE  $A$ , EXISTE UMA PRESSÃO DEFINIDA  $P(A)$ . A FUNÇÃO  $P$  ENGOLE ALTITUDE E EXPELE PRESSÃO.

NÃO FALE COM A BOCA CHEIA.

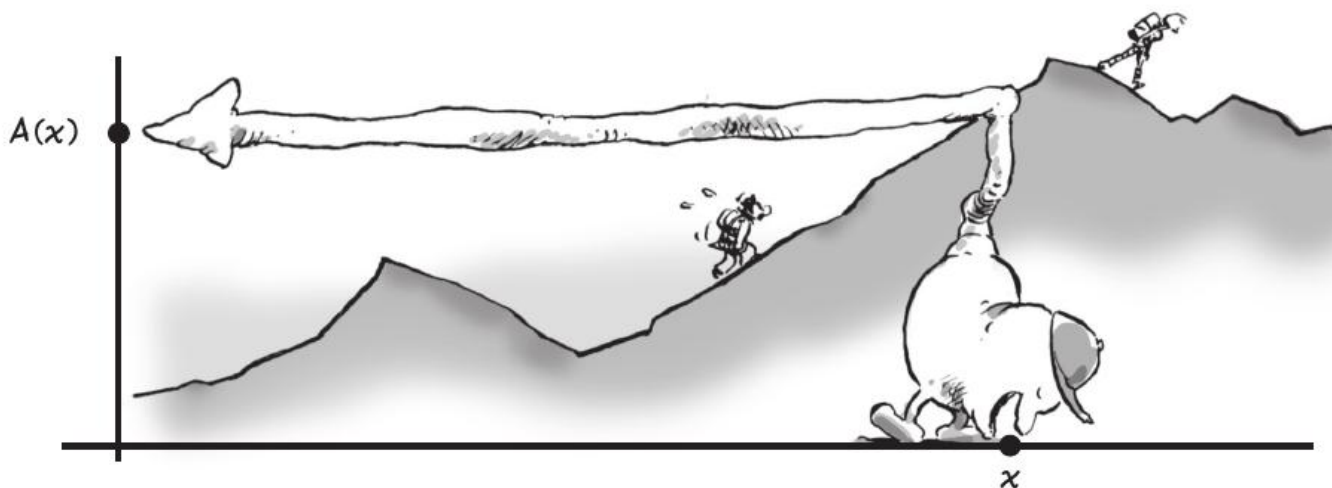


À MEDIDA QUE UM BALÃO ESFÉRICO É INFLADO, SEU VOLUME É FUNÇÃO DO RAIO. CADA RAIO  $r$  DETERMINA UM VOLUME ÚNICO  $V(r)$ .

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$



NUMA TRILHA RETA DE MONTANHA, A ALTITUDE É FUNÇÃO DA POSIÇÃO AO LONGO DA TRILHA. CADA POSIÇÃO  $x$  CORRESPONDE A UMA ÚNICA ALTITUDE  $A(x)$ .

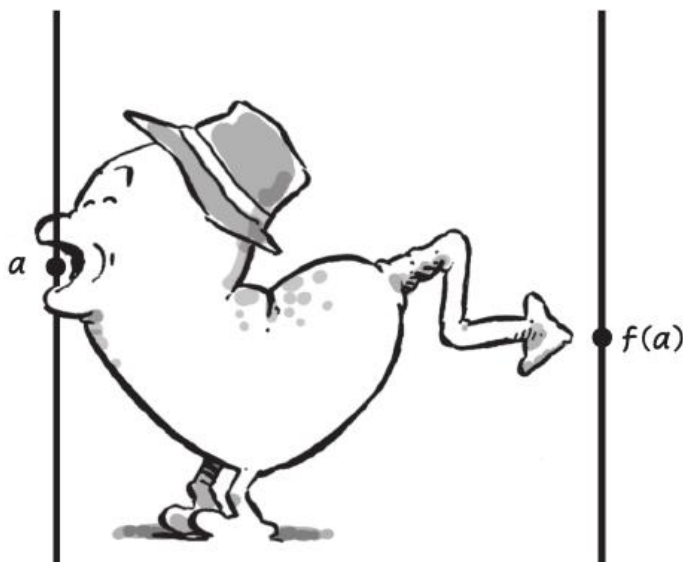


# CAPÍTULO 1

## LIMITES

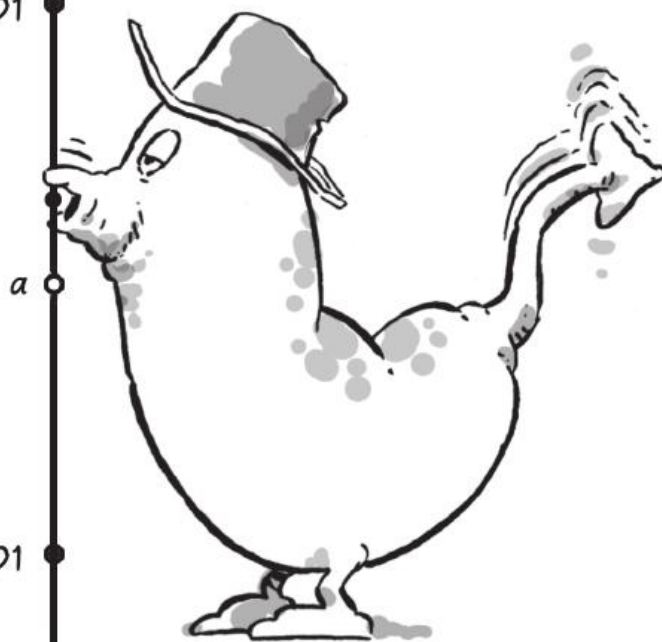
UMA GRANDE IDEIA A RESPEITO DE COISAS PEQUENAS

O ÚLTIMO CAPÍTULO TRATOU DE FUNÇÕES "FIXAS", POR ASSIM DIZER. DADO UM PONTO  $x$ , SEGUIMOS A SETA ATÉ O **LOCAL** DE  $f(x)$ .



AGORA O CÁLCULO APRESENTA UMA NOVA IDEIA: NÃO APENAS O VALOR DE UMA FUNÇÃO NO PONTO  $a$ , MAS COMO  $f(x)$  SE APRESENTA NAS PROXIMIDADES, MAS **MUITO PRÓXIMO MESMO**, DE  $a$ . DE FATO, PODEREMOS ESTAR INTERESSADOS NOS PONTOS  $x$  DA VIZINHANÇA MESMO QUE A FUNÇÃO NÃO SEJA DEFINIDA NO PONTO  $a$ !!

$a + 0,000001$



$a - 0,000001$

MAS POR QUÊ?





POR QUÊ? A RAZÃO  
 VEM DA IDEIA DE  
 NEWTON E LEIBNIZ  
 A RESPEITO DA  
**VELOCIDADE.**  
 (VER PÁGINAS 15-16.)



LEMBRE-SE, A IDEIA DELES ERA ESTA: SE  $s(t)$  É A POSIÇÃO NUM INSTANTE  $t$ , E  $a$  É UM MOMENTO NO TEMPO, ENTÃO, QUANDO  $t$  ESTÁ PRÓXIMO A  $a$ , A VELOCIDADE NO INSTANTE  $a$  É MUITO PRÓXIMA AO "QUOCIENTE DE DIFERENÇA"  $D(t)$ .

$$D(t) = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

$D$  É UMA FUNÇÃO DE  $t$  QUE NÃO É DEFINIDA EM  $t = a$ , MAS É DEFINIDA QUANDO  $t$  É **PRÓXIMO** DE  $a$ . À MEDIDA QUE  $t$  SE APROXIMA DE  $a$ , ESPERAMOS QUE  $D(t)$  SE APROXIME DA VELOCIDADE INSTANTÂNEA EM  $a$ . NÓS IREMOS QUERER ESCREVER

$$v(a) = \lim_{t \rightarrow a} D(t)$$



E DIZEMOS QUE  $v(a)$  É O **LIMITE** DE  $D(t)$  QUANDO  $t$  TENDE A  $a$ .

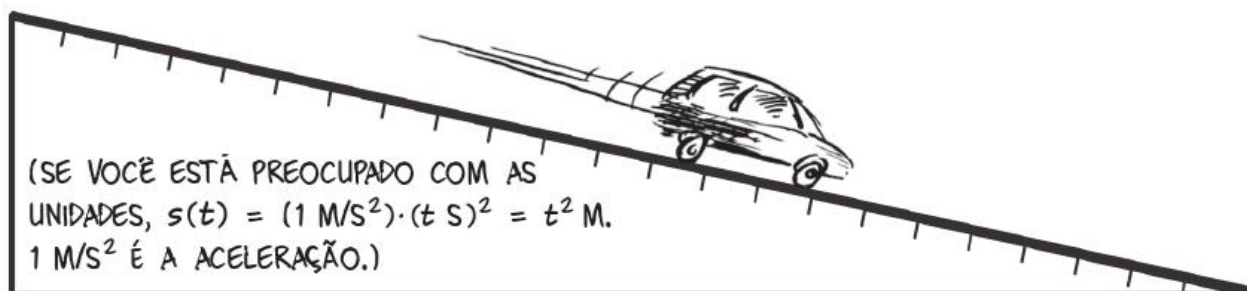
O CHUTE DIROU MÍSEROS MILISSEGUNDOS, MAS **CERTAMENTE** TINHA VELOCIDADE.

CERTAMENTE.



POR EXEMPLO, ASSIM ACONTECE NUMA RAMPA EM ÂNGULO LIGEIRAMENTE SUPERIOR A 11,77 GRAUS, EM QUE UM VEÍCULO SEM ATRITO, PARTINDO DO REPOUSO EM  $s = 0$ , DESCERÁ CONFORME A FÓRMULA

$$s(t) = t^2 \text{ METROS}$$



ENTÃO, PRÓXIMO A UM PONTO NO INSTANTE  $a$ ,

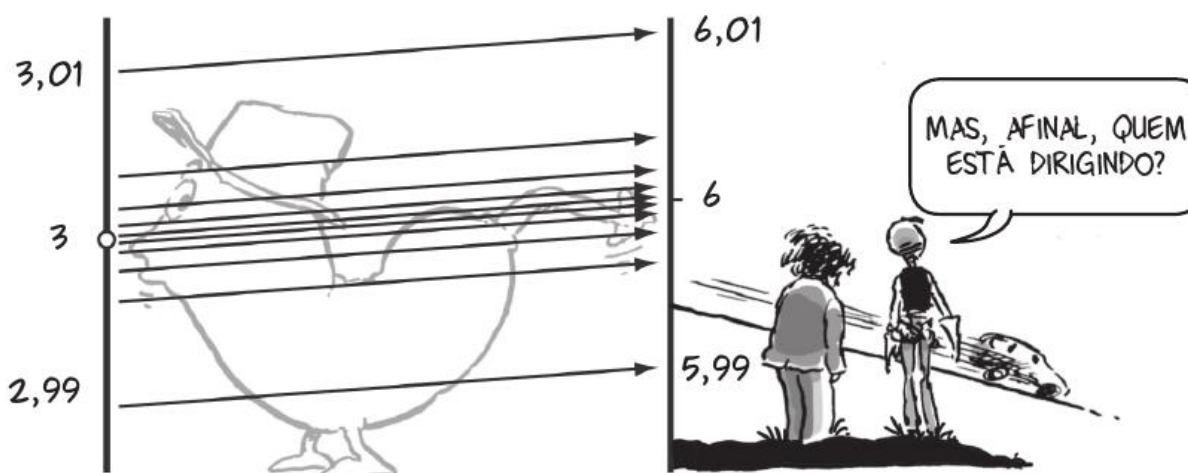
$$D(t) = \frac{t^2 - a^2}{t - a}$$

VAMOS SUPOR QUE  $a = 3 \text{ S}$ , E VEJAMOS O QUE ACONTECE COM  $D(t)$  QUANDO  $t$  ESTÁ PRÓXIMO A  $a$ :



$t$	$t - 3$	$t^2 - 9$	$D(t)$
2,9	-0,1	-0,59	5,9
2,99	-0,01	-0,0599	5,99
2,999	-0,001	-0,005999	5,999
...	...	...	...
3,001	0,001	0,006001	6,001
3,01	0,01	0,0601	6,01
3,1	0,1	0,61	6,1

$D(t)$  DÁ TODA A IMPRESSÃO DE ATINGIR O LIMITE IGUAL A 6 À MEDIDA QUE  $t \rightarrow 3$

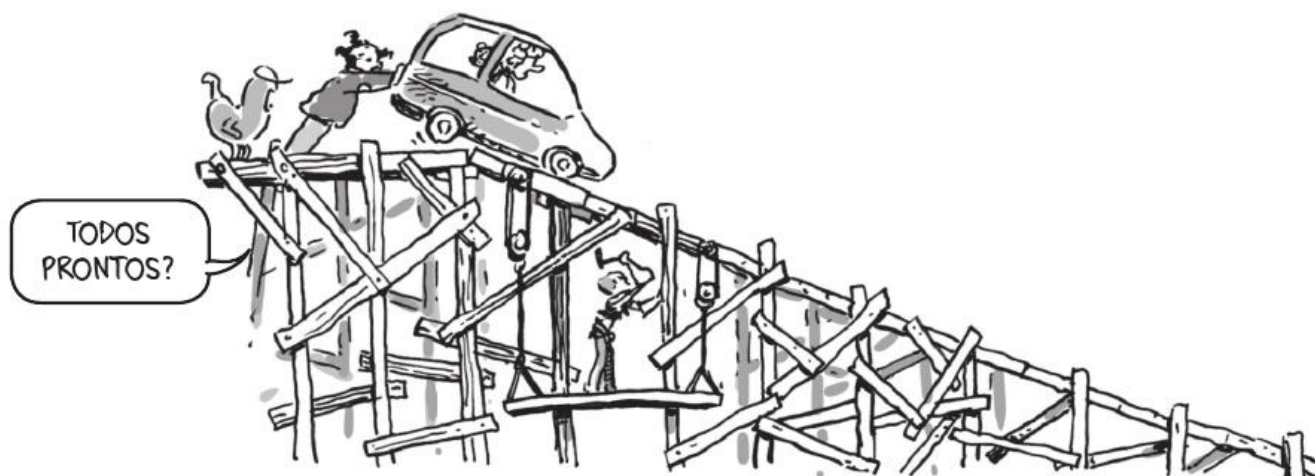


# CAPÍTULO 2

## A DERIVADA

GANHANDO VELOCIDADE

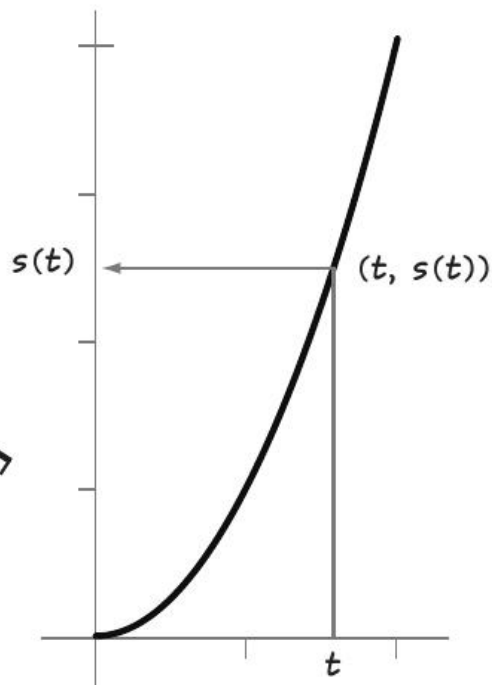
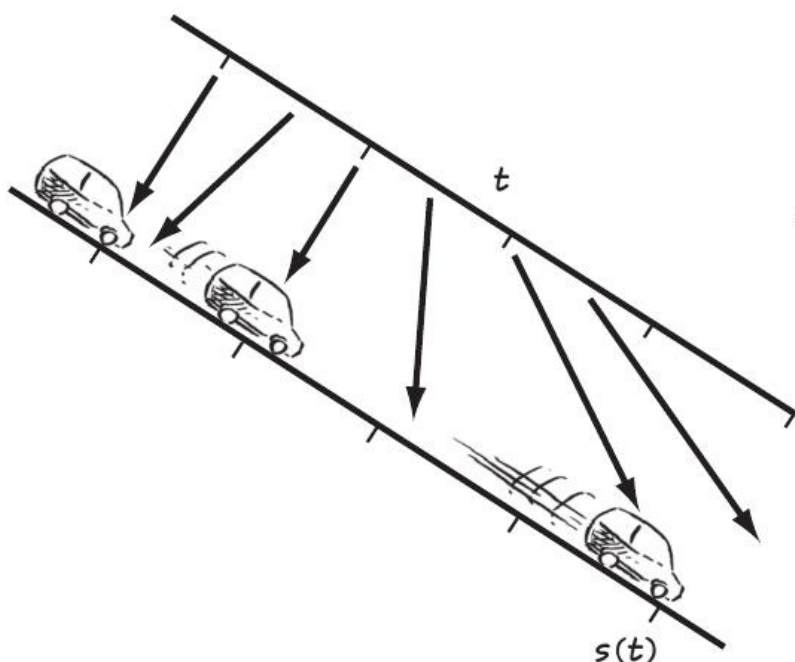
AGORA CHEGAMOS AO CORAÇÃO DO CÁLCULO: A **TAXA DE VARIAÇÃO** DE UMA FUNÇÃO. POR EXEMPLO, SEJA A FUNÇÃO  $s(t) = t^2$  QUE DESCREVE UM CARRO DESCENDO UMA RAMPA.



PODEMOS ENXERGAR A FUNÇÃO  $s$  DE PELO MENOS DUAS MANEIRAS:

1.  $s$  ADMITE ENTRADAS  $t$  DE UMA LINHA DO TEMPO E APONTA PARA A POSIÇÃO  $s(t)$  DO CARRO NA PISTA.

2. O GRÁFICO  $y = s(t)$ , NESTE CASO  $y = t^2$ , UMA PARÁBOLA.





AQUI ESTÃO TRÊS MODOS DE PENSAR SOBRE A VELOCIDADE DO CARRO EM TERMOS DA FUNÇÃO  $s$ .



1. NA IMAGEM DA LINHA DO TEMPO, ELA É SIMPLEMENTE A VELOCIDADE DAS PONTAS DAS SETAS DA FUNÇÃO, À MEDIDA QUE ESTAS SE MOVEM AO LONGO DO EIXO  $s$ ! A PONTA DA SETA COINCIDE COM O CARRO, ASSIM AMBOS TÊM A MESMA VELOCIDADE.



2. NO INSTANTE  $t = a$ , A VELOCIDADE  $v(a)$  É

$$v(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

COMO VIMOS NA PÁGINA 62, A VELOCIDADE MÉDIA NO INTERVALO  $(a, t)$  SE APROXIMA DA VELOCIDADE INSTANTÂNEA À MEDIDA QUE O INTERVALO DIMINUI. COMO ANTES, FAZEMOS  $h = t - a$  E REESCREVEMOS O QUOCIENTE DE DIFERENÇAS:

$$\frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

ENTÃO O LIMITE FICA NA FORMA

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

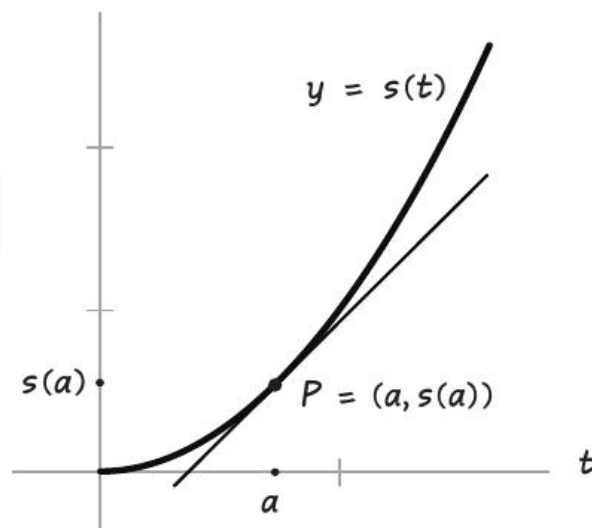
NESTE CASO, QUANDO  $s(t) = t^2$ , PODEMOS DE FATO AVALIAR ESTA EXPRESSÃO:

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) \\ &= 2a \end{aligned}$$

ESTA É A VELOCIDADE DO CARRO NO INSTANTE  $t = a$ .



3. NO GRÁFICO  $y = s(t)$ , A VELOCIDADE  $v(a)$  NO INSTANTE  $a$  É A **INCLINAÇÃO DO GRÁFICO** EM  $t = a$ .

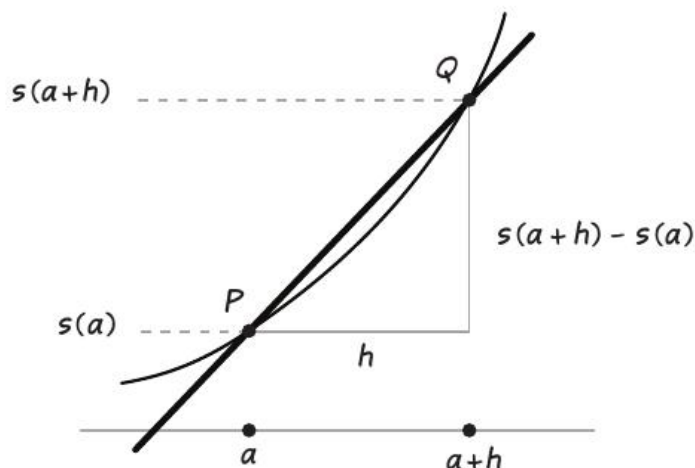


ISTO É VERDADE, POIS NÓS **DEFINIMOS** A INCLINAÇÃO DE UMA CURVA COMO O **LIMITE** DAS INCLINAÇÕES DE LINHAS. A RAZÃO

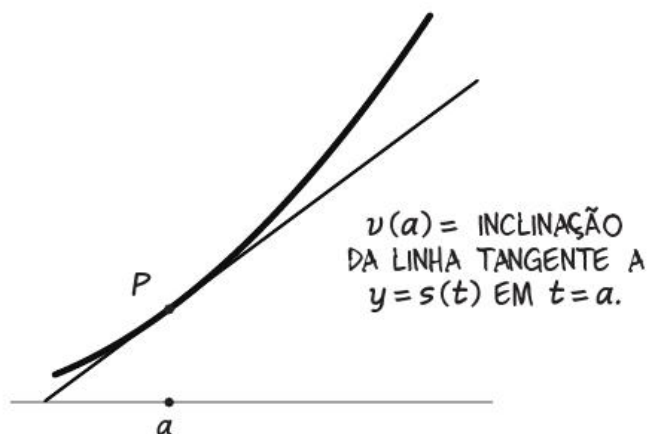
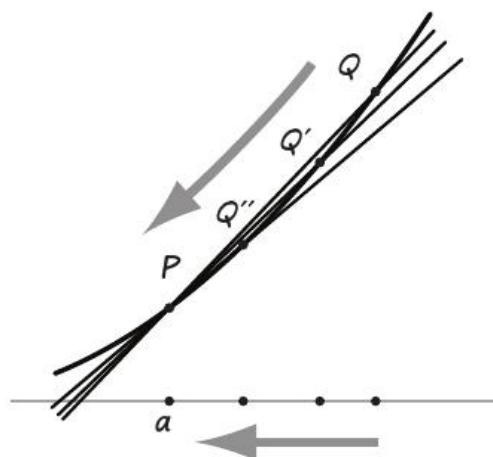
$$\frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

É A INCLINAÇÃO DE UMA LINHA, OU **CORDA**, QUE UNE DOIS PONTOS DA CURVA:

$P = (a, s(a))$  E  
 $Q = (a+h, s(a+h))$ .



À MEDIDA QUE  $h \rightarrow 0$ ,  $Q$  DESLIZA EM DIREÇÃO A  $P$  E AS INCLINAÇÕES DAS CORDAS  $PQ$ ,  $PQ'$ ,  $PQ''$  ETC. SE APROXIMAM DE UM VALOR LIMITE, QUE INTERPRETAMOS COMO SENDO A **INCLINAÇÃO DA CURVA** NO PONTO  $P$ . SE  $s(t) = t^2$ , ACABAMOS DE DESCOBRIR QUE ESTA INCLINAÇÃO É  $v(a) = 2a$ .



# CAPÍTULO 3

## CADEIA, CADEIA, CADEIA

FUNÇÕES COMPOSTAS, ELEFANTES, RATOS E PULGAS

AGORA ESTAMOS CORRENDO...  
OU, TALVEZ, AINDA  
RASTEJANDO... RASTEJANDO  
ATRÁS DE FÓRMULAS... SENDO  
ASSIM, VAMOS CONTINUAR  
RASTEJANDO? ESTE CAPÍTULO  
COMEÇA COM A DEDUÇÃO  
DAS DERIVADAS DE TODAS  
AS FUNÇÕES ELEMENTARES  
REMANESCENTES E DE  
FÓRMULAS LEGAIS E SIMPLES...



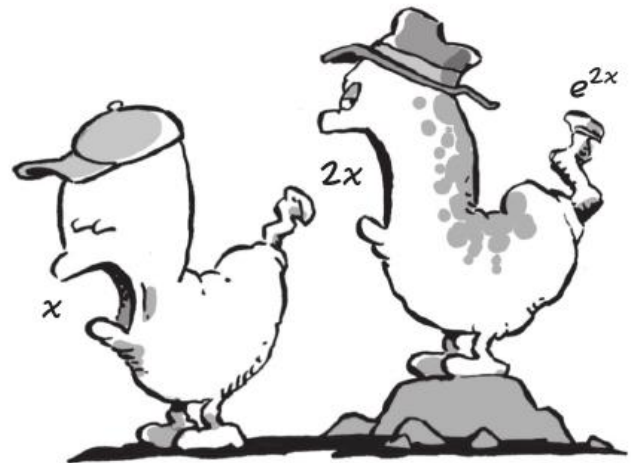
A CHAVE PARA DERIVAR ESTAS FÓRMULAS (E MUITAS OUTRAS ALÉM DELAS) É ALGO CHAMADO **REGRA DA CADEIA**. COMEÇAREMOS CONTANDO O QUE ELA É, EM SEGUIDA A USAREMOS E, FINALMENTE, VAMOS EXPLICAR PORQUE ELA É VERDADEIRA.



A REGRA DA CADEIA É UM PROCEDIMENTO PARA DERIVAR FUNÇÕES **COMPOSTAS**, FUNÇÕES FEITAS PELA APLICAÇÃO DE UMA FUNÇÃO A OUTRA. (VEJA PÁGINAS 46-47). POR EXEMPLO,

$$h(x) = e^{2x}$$

AQUI A FUNÇÃO INTERNA É  $u(x) = 2x$ , ENQUANTO A FUNÇÃO EXTERNA É  $v(u) = e^u$ .



## A REGRA DA CADEIA:

PARA DIFERENCIAR UMA COMPOSIÇÃO  $h(x) = v(u(x))$ , SIGA ESTES PASSOS:

1. DIFERENCIE A FUNÇÃO INTERNA, OU SEJA, ENCONTRE  $u'(x)$ .
2. TRATE A FUNÇÃO INTERIOR  $u$  COMO SE FOSSE UMA VARIÁVEL. DIFERENCIE A FUNÇÃO EXTERNA COM RESPEITO A  $u$ , OU SEJA, ENCONTRE  $v'(u)$ .
3. MULTIPLIQUE OS RESULTADOS DE 1 E 2.
4. FINALMENTE, SUBSTITUA  $u$  POR  $u(x)$  EM  $v'(u)$ .

EM SÍMBOLOS,

$$h'(x) = u'(x) \cdot v'(u(x))$$



ISTO PROVAVELMENTE APARENTA SER PIOR DO QUE REALMENTE É. EM ESSÊNCIA, A REGRA DA CADEIA SIMPLEMENTE DIZ PARA MULTIPLICAR A DERIVADA DA FUNÇÃO INTERNA PELA DERIVADA DA FUNÇÃO EXTERNA.

**EXEMPLO:** COMO APRESENTADO AQUI, SUPONHA  $h(x) = e^{2x}$ . IREMOS PASSO A PASSO:

1.  $u'(x) = 2$
2.  $v'(u) = e^u$
3. O PRODUTO É  $2e^u$
4. SUBSTITUÍMOS  $u$  POR  $u(x) = 2x$  PARA OBTERMOS O RESULTADO FINAL:

$$h'(x) = 2e^{2x}$$

**EXEMPLO:**  $G(x) = \text{sen}(x^2)$ . A FUNÇÃO INTERNA É  $u(x) = x^2$ . A FUNÇÃO EXTERNA É  $v(u) = \text{sen } u$ .

1.  $u'(x) = 2x$
2.  $v'(u) = \cos u$
3. O PRODUTO É  $2x \cos u$
4. ESCRREVENDO  $u(x) = x^2$  NO LUGAR DE  $u$  CHEGA-SE À DERIVADA:

$$G'(x) = 2x \text{sen}(x^2)$$

O QUE HÁ DE ERRADO?

ESTOU CANSADA DE SER TRATADA COMO UMA VARIÁVEL...



**LEMBRE-SE:** NO PASSO 2, SEMPRE TRATE A FUNÇÃO INTERNA INTEIRAMENTE COMO SE FOSSE UMA VARIÁVEL!!



## MAIS UM EXEMPLO!

$$f(x) = (2x^3 + 3)^8.$$

$$\text{FUNÇÃO INTERNA: } u(x) = 2x^3 + 3.$$

$$\text{FUNÇÃO EXTERNA: } v(u) = u^8$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)g'(u) \\ &= (6x^2)(8u^7) \\ &= (6x^2)(8(2x^3 + 3)^7) \\ &= 48x^2(2x^3 + 3)^7 \end{aligned}$$

AQUI A REGRA DA CADEIA NOS PERMITE DIFERENCIAR UM POLINÔMIO MONSTRO DE 240 GRAUS, SEM PRIMEIRO TER DE EXPANDI-LO.

## CAPÍTULO 4

# USANDO DERIVADAS, PARTE 1: TAXAS RELACIONADAS

NO QUAL REALMENTE FALAREMOS SOBRE O MUNDO REAL

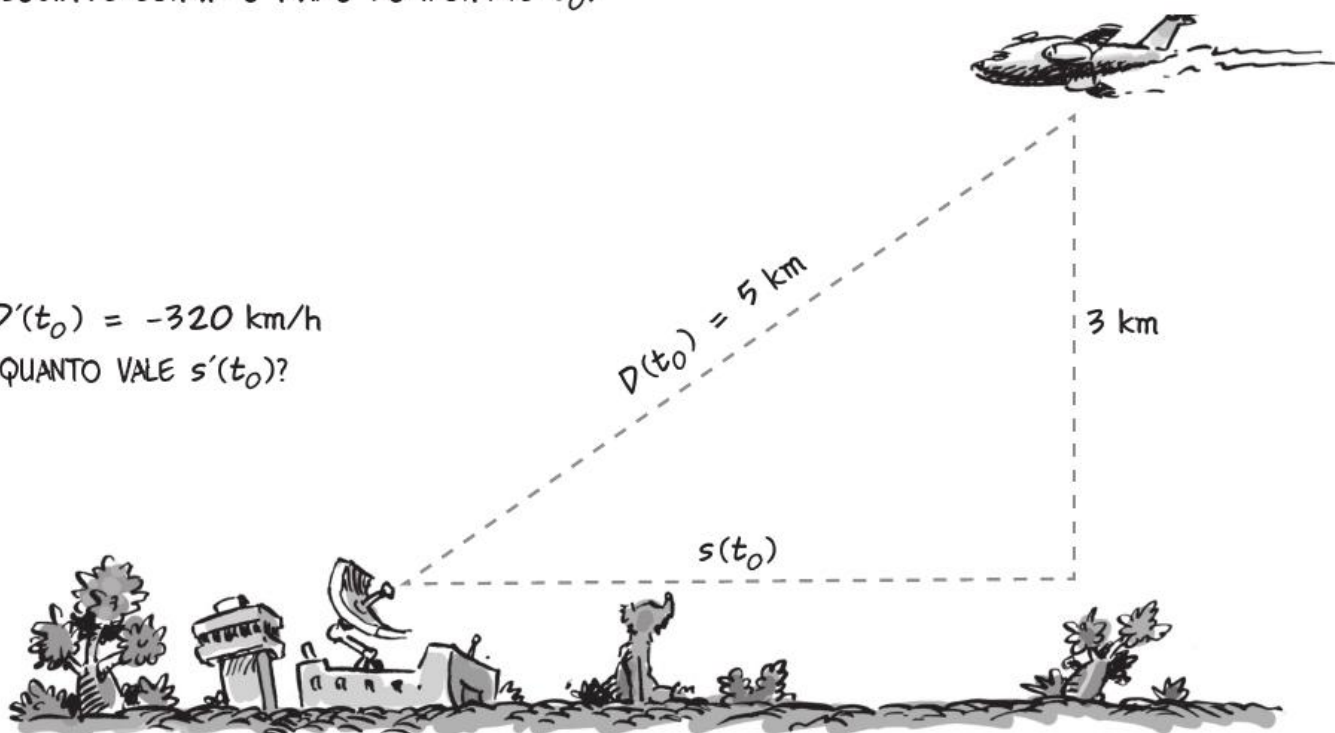
A REGRA DA CADEIA É MAIS DO QUE UMA FÓRMULA PARA ENCONTRAR DERIVADAS: ELA NOS AJUDA A **RESOLVER PROBLEMAS**.



### EXEMPLO 1:

UM AVIÃO VOANDO A ALTITUDE CONSTANTE DE 3 KM ESTÁ SENDO RASTREADO POR UMA ESTAÇÃO DE RADAR NO SOLO. NUM DETERMINADO INSTANTE  $t_0$ , A EQUIPE DO RADAR AVALIA QUE O AVIÃO ESTÁ A 5 KM DE DISTÂNCIA E ESSA DISTÂNCIA DIMINUI A UMA TAXA DE 320 KM/H. A QUE VELOCIDADE ESTAVA O AVIÃO NO INSTANTE  $t_0$ ?

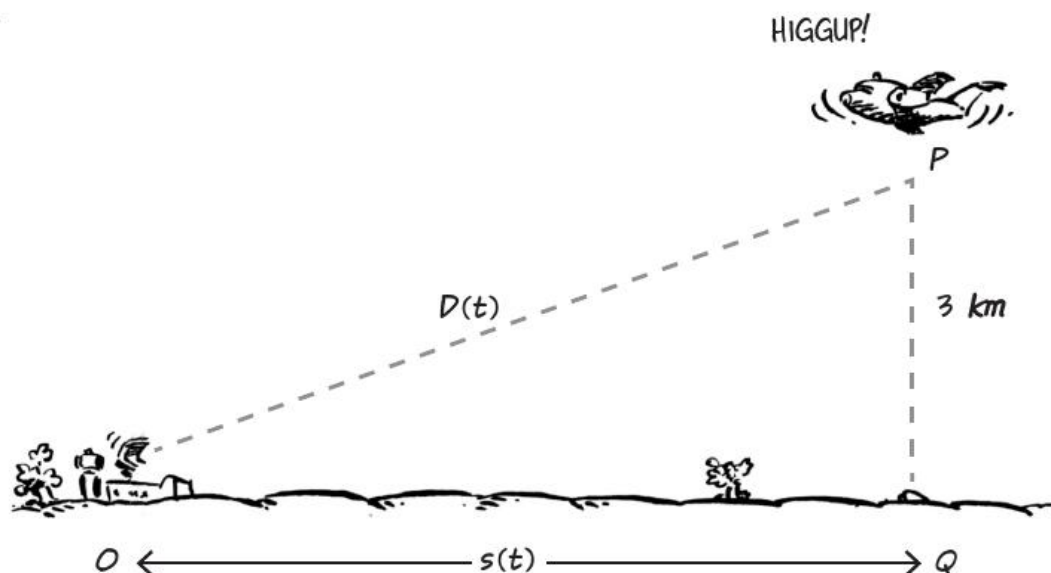
$D'(t_0) = -320$  km/h  
QUANTO VALE  $s'(t_0)$ ?





NUM INSTANTE  $t$  QUALQUER, O RADAR ESTÁ NUM VÉRTICE DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO  $OPQ$ , SENDO A HIPOTENUSA  $D(t)$ . SE  $s(t)$  É O DESLOCAMENTO **HORIZONTAL** DO AVIÃO NUM INSTANTE  $t$ , NÓS ESTAMOS PERGUNTANDO QUANTO É  $s'(t)$ , A DERIVADA DE  $s$ ?

VOCÊ PODE QUERER SABER COMO ENCONTRAMOS  $s'(t)$  QUANDO NÃO TEMOS A **MENOR IDEIA** DE COMO É  $s$ . O PILOTO PODE ESTAR ACELERANDO OU DESACELERANDO, COMO UM BÊBADO!



É ISTO O QUE SABEMOS:

$$D^2 - s^2 = 3^2 \quad \text{E TAMBÉM}$$

$$D(t_0) = 5 \quad s(t_0) = 4 \quad D'(t_0) = -320$$

MESMO SEM CONHECER AS FUNÇÕES  $s(t)$  E  $D(t)$ , A PRIMEIRA EQUAÇÃO IMPLICA A EXISTÊNCIA DE UMA RELAÇÃO ENTRE AS SUAS DERIVADAS. PELA REGRA DA CADEIA, PODEMOS ENCONTRAR A DERIVADA DO QUADRADO DE UMA FUNÇÃO:  $\frac{d}{dx}(f)^2 = 2f'f$ . (VEJA O EXEMPLO 7, PÁGINA 116). ASSIM NÓS DERIVAMOS:

$$2DD' - 2ss' = 0$$

ASSIM

$$s' = \frac{DD'}{s} \quad \text{SEMPRE QUE } s(t) \neq 0$$

ENTÃO, NO INSTANTE  $t_0$ ,

$$s'(t_0) = \frac{5}{4}(-320) = -400 \text{ km/h}$$

AS DERIVADAS  $s'$  E  $D'$  SÃO TAXAS RELACIONADAS.

COM BASE NUMA INFORMAÇÃO OBTIDA NO SOLO, OBTEMOS A VELOCIDADE DE UM AVIÃO EM VOO!



## CAPÍTULO 5

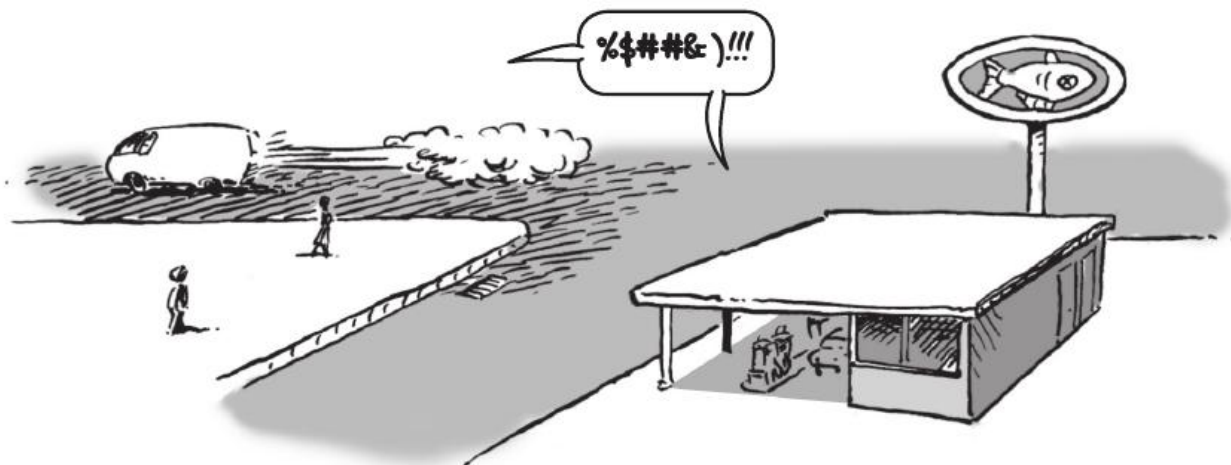
# USANDO DERIVADAS, PARTE 2: OTIMIZAÇÃO

QUANDO FUNÇÕES CHEGAM NO FUNDO (OU NO TOPO)

NO MUNDO REAL, AS  
PESSOAS SEMPRE PROCURAM  
MODOS PARA **OTIMIZAR** AS  
COISAS... O QUE SIGNIFICA  
ENCONTAR O **MELHOR**  
MODO DE FAZER ALGO...  
QUEREMOS A MELHOR  
QUALIDADE - E MÁXIMA  
QUANTIDADE!



POR EXEMPLO, UMA COMPANHIA DE ENTREGAS QUER MINIMIZAR SEUS CUSTOS COM COMBUSTÍVEL AO BUSCAR UMA ROTA ÓTIMA QUE CONSUMA A MENOR QUANTIDADE DE GASOLINA. UMA COMPANHIA DE PETRÓLEO QUER O OPOSTO!



UM ECÓLOGO TRABALHANDO NUMA COMPANHIA DE PESCA QUER CALCULAR A MÁXIMA QUANTIDADE DE PESCAO COMPATÍVEL COM UMA POPULAÇÃO SUSTENTÁVEL DE PEIXES.



UM FABRICANTE QUER MAXIMIZAR OS LUCROS.

TRAGA-ME UM ESTUDANTE DE CÁLCULO!!

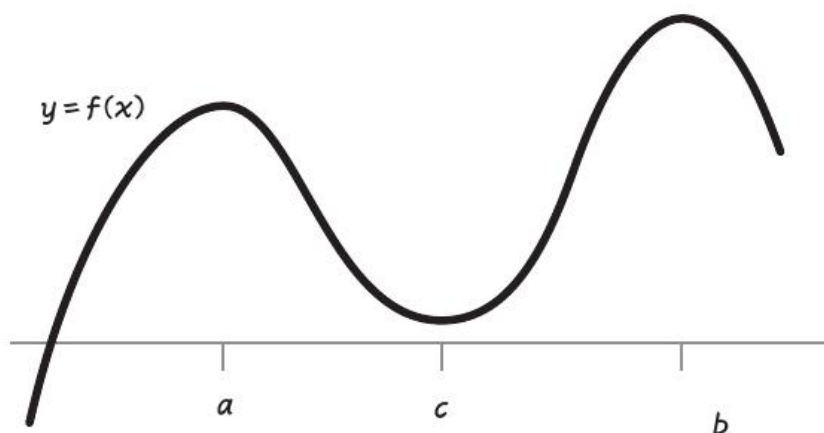


EM TODOS ESTES EXEMPLOS, A SOLUÇÃO ÓTIMA É AQUELA QUE **MAXIMIZA** OU **MINIMIZA** ALGUMA FUNÇÃO.





UM **MÁXIMO LOCAL** DE UMA FUNÇÃO É UM PONTO  $a$  EM QUE O GRÁFICO ATINGE UM TOPO. EM UM MÁXIMO LOCAL  $a$  DE UMA FUNÇÃO  $f$ ,  $f(a) \geq f(x)$  PARA TODO  $x$  EM ALGUM INTERVALO AO REDOR DE  $a$ . UM **MÍNIMO LOCAL**  $c$  É O FUNDO DE UM VALE, EM QUE  $f(x) \geq f(c)$  PARA PONTOS  $x$  NA VIZINHANÇA. "LOCAL" SIGNIFICA QUE O VALOR DE  $f(a)$  É COMPARADO SOMENTE AO DE PONTOS VIZINHOS. PODE HAVER OUTRO MÁXIMO LOCAL  $b$  ONDE  $f$  É MAIOR, OU SEJA,  $f(b) > f(a)$ . TANTO O MÁXIMO LOCAL QUANTO O MÍNIMO LOCAL SÃO CHAMADOS **PONTO EXTREMO** LOCAL OU **ÓTIMO** LOCAL.



AQUI  $a$  E  $b$  SÃO OS DOIS MÁXIMOS LOCAIS E  $f(b) > f(a)$ .  $c$  É UM MÍNIMO LOCAL.

## FATO 1 SOBRE EXTREMOS:

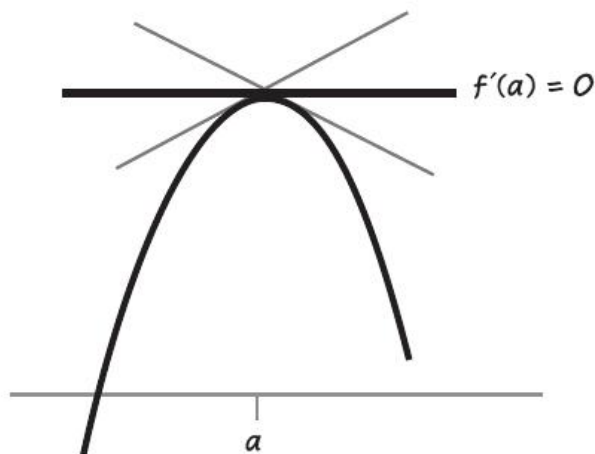
SE  $a$  FOR UM EXTREMO LOCAL DE UMA FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL  $f$ , ENTÃO

$$f'(a) = 0$$

**PROVA:** SUPONHA QUE  $a$  É UM MÁXIMO LOCAL. ENTÃO, PARA UM  $h$  PEQUENO,

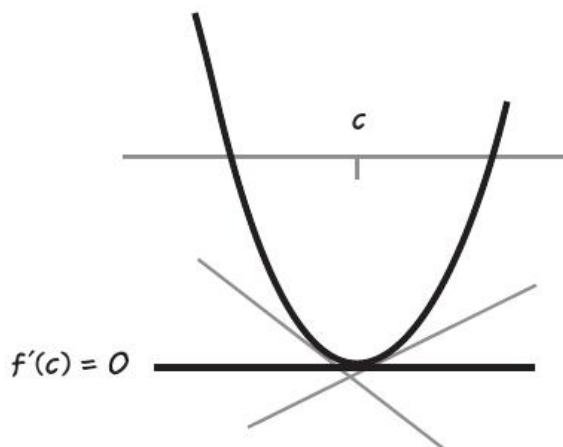
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \text{ QUANDO } h > 0$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \text{ QUANDO } h < 0$$



ASSIM, O LIMITE QUANDO  $h \rightarrow 0$  DEVE SER TANTO NÃO NEGATIVO COMO NÃO POSITIVO, LOGO É IGUAL A ZERO. SE  $a$  FOR UM MÍNIMO LOCAL, ENTÃO É UM MÁXIMO LOCAL DE  $-f$ , ASSIM, NOVAMENTE, A DERIVADA É NULA.

A INCLINAÇÃO DO GRÁFICO EM  $a$  ESTÁ MUDANDO DE POSITIVA PARA NEGATIVA, OU VICE-VERSA, E ASSIM CHEGA A ZERO NO PONTO EXTREMO.



## CAPÍTULO 6

# ATUANDO LOCALMENTE

NO QUAL SEGUIREMOS UMA LINHA

AGORA VAMOS MUDAR UM POUCO A NOSSA PERSPECTIVA. EM VEZ DE ASSISTIRMOS A DERIVADA VAGUEAR EM SEU DONÍNIO, VAMOS CENTRAR A NOSSA ATENÇÃO NUM ÚNICO PONTO. VOCÊ PODE SE SURPREENDER COM O QUANTO ENCONTRAREMOS LÁ...



NA PÁGINA 121 DESCREVEMOS ALGUMAS PEQUENAS MUDANÇAS DA FUNÇÃO  $f$  AO REDOR DE UM PONTO  $a$  COM ALGO QUE CHAMAMOS **EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DO CÁLCULO**:

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + \text{PULGA}$$

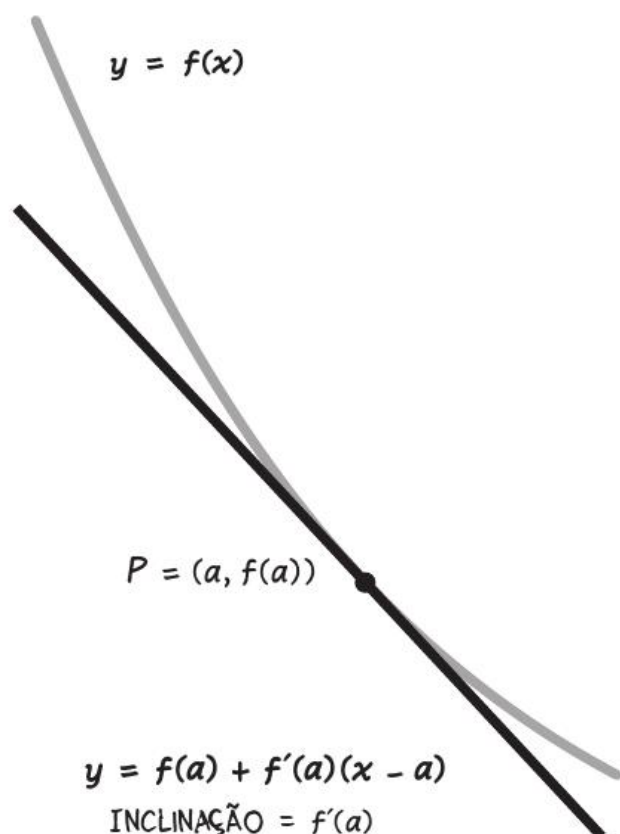
ESTA EQUAÇÃO DIZ QUE A DISCREPÂNCIA ENTRE  $f(a + h) - f(a)$ , OU  $\Delta f$ , NUM LADO E  $hf'(a)$  NOUTRO É PEQUENA, SE COMPARADA COM  $h$ . ISTO TORNA FÁCIL CALCULAR VALORES APROXIMADOS DE  $f$ .



EM MATEMÁTICA, ÀS VEZES, UMA MUDANÇA PEQUENA DE NOTAÇÃO PODE MUDAR TOTALMENTE SUA PERSPECTIVA...



ISTO É O QUE  
**EU TENHO**  
DITO SEMPRE.



VAMOS ESCRIVER  $x = a + h$ , ASSIM  $h = x - a$ . ENTÃO, A EQUAÇÃO FUNDAMENTAL PASSA A SER

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \text{PULGA}$$

OU

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \text{PULGA}$$

ENTÃO, ESTE É UM MODO DE DESCREVER A FUNÇÃO ORIGINAL  $f$  NA VIZINHANÇA DE  $a$ . AGORA SUBTRAÍMOS A PULGA PARA OBTENIR UMA FUNÇÃO MAIS SIMPLES.

$$T_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

SEU GRÁFICO É UMA LINHA RETA - A PRIMEIRA E ÚNICA LINHA QUE, DE FATO, PASSA POR  $a$  E TEM INCLINAÇÃO  $f'(a)$ .



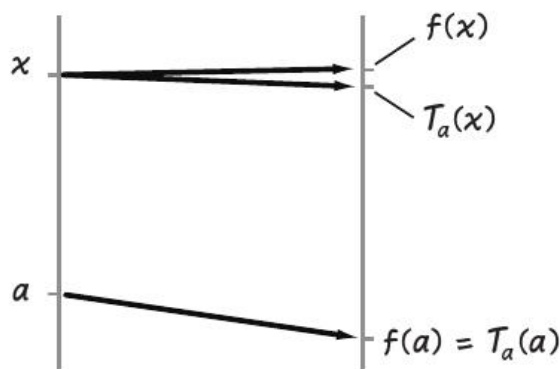
ESTA LINHA, A **TANGENTE** AO GRÁFICO  $y = f(x)$  EM  $a$ , TOCA A CURVA NO PONTO  $P = (a, f(a))$  E TEM INCLINAÇÃO IGUAL À DERIVADA DE  $f$  NESSE PONTO. É A FUNÇÃO RETA COM O MESMO VALOR E DERIVADA DE  $f$  EM  $a$ .

E  $T_a$  DIFERE DE  $f$  POR UMA PULGA  
- O QUE SIGNIFICA, COMO VOCÊ  
LEMBRA, QUE NÃO HÁ APENAS

$$\lim_{x \rightarrow a} (T_a(x) - f(x)) = 0$$

MAS HÁ TAMBÉM

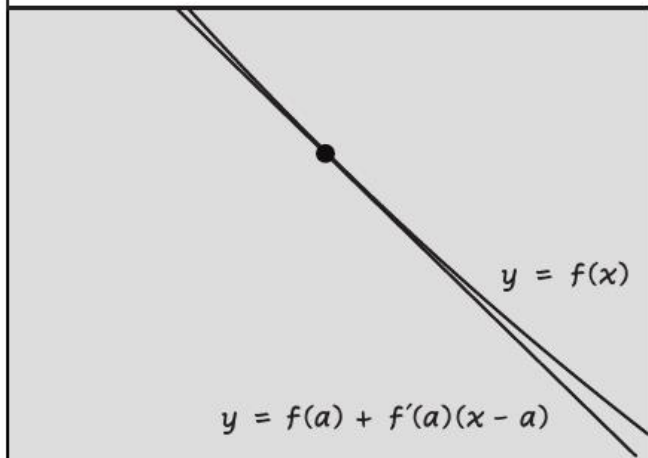
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x - a)} (T_a(x) - f(x)) = 0$$



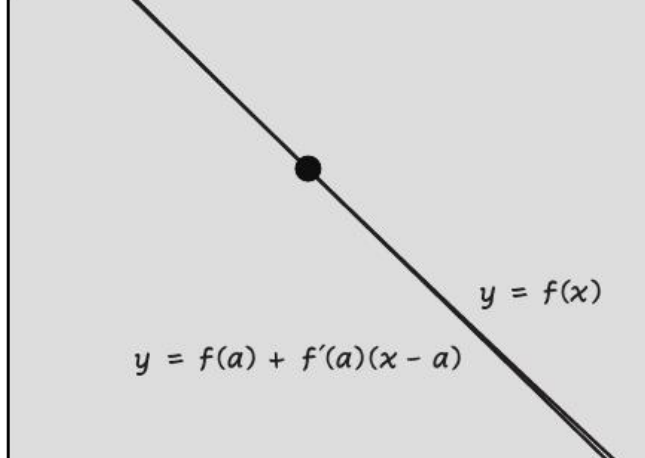
ISTO É, PRÓXIMO AO PONTO  $a$ ,  
A DIFERENÇA ENTRE  $T_a(x)$  E  
 $f(x)$  É PEQUENA, **MESMO**  
QUANDO COMPARADA A  $x - a$ .

PODEMOS EXPRESSAR ISTO AO DIZERMOS QUE, QUANTO MAIS OLHAMOS DE PERTO O PONTO  $P$ , MAIS O GRÁFICO  $y = f(x)$  FICA PARECIDO COM UMA RETA.

PENSE NO PONTO  $x$  NA BORDA DO  
RETÂNGULO CINZA E  $a$  NO CENTRO. AGORA  
OLHE DE PERTO...



O RETÂNGULO CINZA TEM LADO IGUAL A  
 $2(x - a)$ , E A DISTÂNCIA ENTRE A  
CURVA E A LINHA DEVE DIMINUIR ATÉ FICAR  
INSIGNIFICANTE.





## CAPÍTULO 7

# O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

ALGUNS PENSAMENTOS TÉORICOS, FRENÉTICOS E FINAIS  
(QUE VOCÊ PODE DEIXAR DE LADO SE TUDO O QUE IMPORTAR PARA VOCÊ É COMO USAR O CÁLCULO, E SE NÃO DER A MÍNIMA PARA SEUS FUNDAMENTOS PROFUNDOS, BELOS E ELEGANTES - VEJA SE EU ME IMPORTO!)

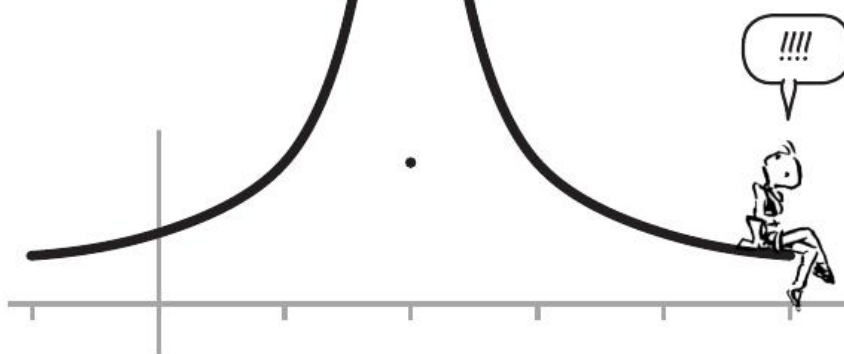


DE FATO, ALGUMAS FUNÇÕES **PODEM** SE COMPORTAR DESSE MODO. AQUI ESTÁ UMA:

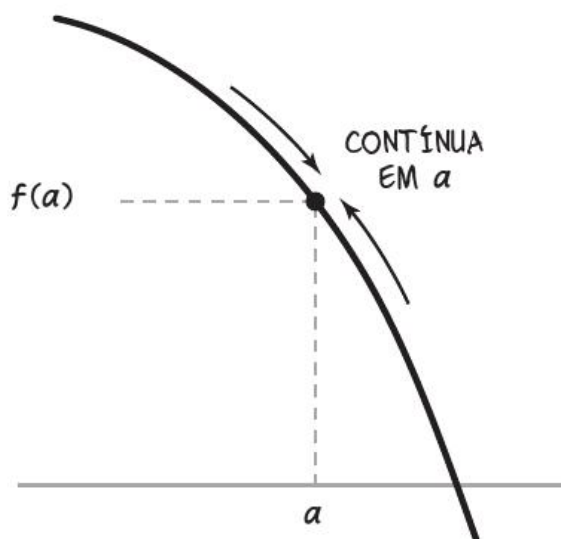
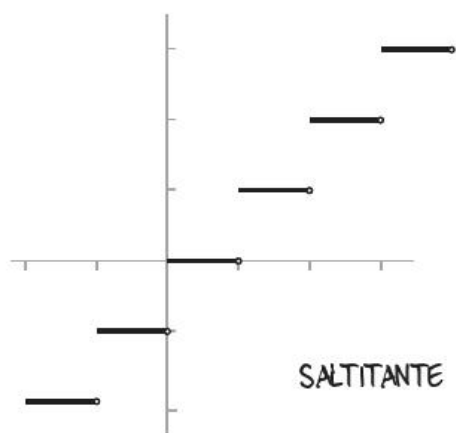
$$f(x) = \frac{1}{|x - 2|} \quad \text{QUANDO } x \neq 2$$

$$f(2) = 1$$

ESTA É UMA FUNÇÃO SEM QUALQUER TIPO DE PROBLEMA. APENAS É UM POUCO MALCOMPORTADA! TENDE A INFINITO QUANDO  $x \rightarrow 2$ , MAS SALTA DE VOLTA PARA UM VALOR FINITO EM  $x = 2$ .  $f$  NÃO POSSUI **MÁXIMOS** EM QUALQUER INTERVALO QUE CONTENHA  $x = 2$ .



O PROBLEMA DESTA FUNÇÃO É O PONTO ISOLADO (2, 1) EM SEU GRÁFICO... A FUNÇÃO NÃO SE APROXIMA DESTES PONTOS. ELA SIMPLEMENTE **SALTA** ATÉ ELE, POR ASSIM DIZER... ASSIM, VAMOS VER AS FUNÇÕES SEM QUAISQUER SALTOS... FUNÇÕES CUJO GRÁFICO POSSA SER DESENHADO SEM TIRAR O LÁPIS DO PAPEL. TAIS FUNÇÕES "NÃO SALTANTES" SÃO DENOMINADAS **CONTÍNUAS**.



DE MODO MATEMÁTICO, DIZEMOS QUE  $f$  É **CONTÍNUA NUM PONTO**  $a$  SE

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$f$  É DITA **CONTÍNUA NUM INTERVALO**  $[c, d]$  SE FOR CONTÍNUA EM TODOS OS PONTOS EM  $[c, d]$ .

EM OUTRAS PALAVRAS,  $f$  "CHEGA AONDE ESTAVA INDO".



TODAS AS FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS SÃO CONTÍNUAS, MAS NÃO O OPOSTO. SE  $f$  É DIFERENCIÁVEL EM  $a$ , ENTÃO, SABEMOS QUE  $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \text{PULGA}$ , ASSIM  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$  OU  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . POR OUTRO LADO, UMA FUNÇÃO CONTÍNUA PODE TER CÚSPIDES EM QUE NÃO É DIFERENCIÁVEL.



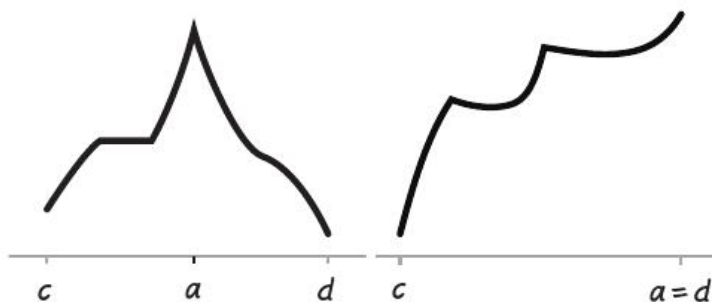
MAS



## TEOREMA DO VALOR EXTREMO:

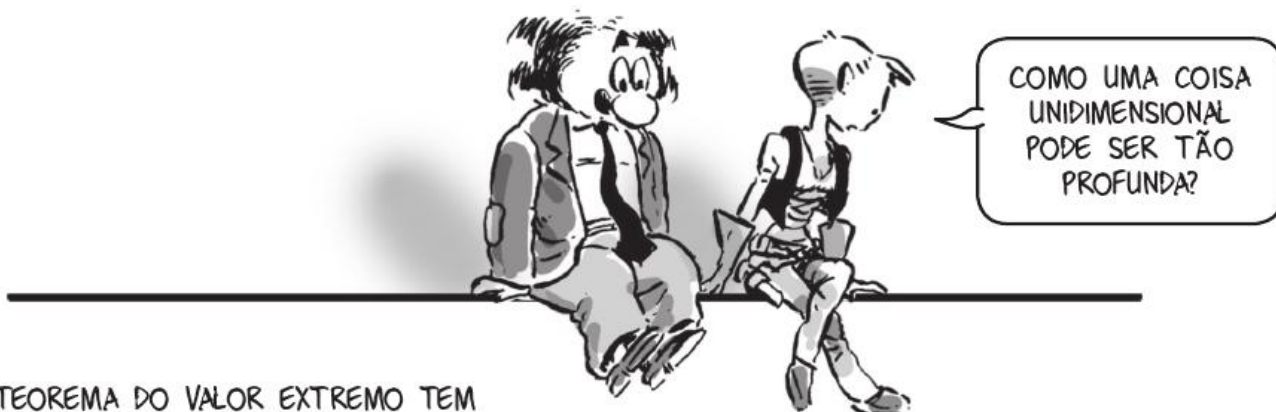
UMA FUNÇÃO CONTÍNUA  $f$  DEFINIDA NUM INTERVALO FECHADO  $[c, d]$  ATINGE UM VALOR MÁXIMO  $M$  NO INTERVALO: OU SEJA, HÁ UM PONTO  $a$  EM  $[c, d]$  EM QUE  $f(a) = M$  E  $f(x) \leq M$  PARA QUALQUER OUTRO  $x$  EM  $[c, d]$ .

(NOTE QUE ISTO TAMBÉM IMPLICA A EXISTÊNCIA DE UM MÍNIMO, POIS  $-f$  DEVE TER UM MÁXIMO!)



PODE ESTAR NO INTERIOR OU EM UMA DAS EXTREMIDADES!

DEVEMOS OMITIR A PROVA, QUE DEPENDE DE PROPRIEDADES PROFUNDAS E SUTIS DOS NÚMEROS REAIS.

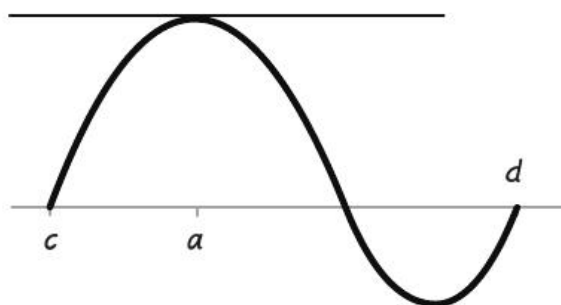


O TEOREMA DO VALOR EXTREMO TEM ESSA CONSEQUÊNCIA PARA O CÁLCULO:

**TEOREMA DE ROLLE:** SE  $f$  FOR CONTÍNUA NUM INTERVALO FECHADO  $[c, d]$  E DIFERENCIÁVEL EM  $(c, d)$ , E  $f(c) = f(d) = 0$ , ENTÃO HÁ PELO MENOS UM PONTO  $a$  NO INTERVALO ABERTO  $(c, d)$  EM QUE  $f'(a) = 0$ .

**PROVA:** SE  $f$  FOR A FUNÇÃO CONSTANTE  $f = 0$ , ENTÃO O RESULTADO É TRIVIAL: QUALQUER PONTO ENTRE  $c$  E  $d$  SERVIRÁ.

SE  $f$  NÃO FOR CONSTANTE, ENTÃO POSSUI VALORES NÃO NULOS. PORTANTO, ATINGE UM MÁXIMO  $M > 0$  OU UM MÍNIMO  $m < 0$  EM ALGUM PONTO  $a$ , CONFORME O TEOREMA DO VALOR EXTREMO. O PONTO  $a$  NÃO É UM DOS LIMITES DO INTERVALO, POIS  $f(c) = f(d) = 0$ , ASSIM,  $f'(a) = 0$ .





## CAPÍTULO 8

# APRESENTANDO A INTEGRAL

JUNTANDO DOIS E DOIS E DOIS E DOIS COM MAIS DOIS

O CÁLCULO, COMO TEMOS VISTO, DIVIDE QUANTIDADES EM PEQUENAS PARTES, COISINHAS DIMINUTAS COM NOMES COMO  $h$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  E  $\Delta f$ . SE  $P$  FOR UMA TORTA, ENTÃO  $\Delta P$  É UMA FATIA FINA DA TORTA.



ATÉ AGORA VIMOS O QUE ACONTECE QUANDO **DIVIDIMOS** UMA DESTAS COISAS POR OUTRA PARA FAZERMOS RAZÕES COMO  $\Delta f/h$ ... MAS, AGORA, QUEREMOS FAZER ALGO DIFERENTE COM NOSSAS MIGALHAS DE NÚMEROS: QUEREMOS **SOMÁ-LAS**.



A ADIÇÃO É MAIS FÁCIL QUE A MULTIPLICAÇÃO... É POR ISSO QUE A APRENDEMOS PRIMEIRO NA ESCOLA... E, DE FATO, MATEMÁTICOS USAVAM O PROCESSO DE SOMATÓRIA DE PARTES MILHARES DE ANOS ANTES DE NEWTON E LEIBNIZ TEREM INVENTADO O CÁLCULO.



HÁ UMA NOTAÇÃO PADRÃO PARA A SOMATÓRIA DE MUITOS ITENS. USA-SE A LETRA GREGA, EQUIVALENTE AO S, **SIGMA** MAIÚSCULA, QUE SIGNIFICA "SOMA".



SE TIVERMOS UMA SEQUÊNCIA DE  $n$  NÚMEROS

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_n$$

$a_i$  ("A-I") É CHAMADO  **$i$ -ÉSIMO TERMO** DA SEQUÊNCIA, E A SOMA DE TODOS OS TERMOS É ESCRITA

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

LÊ-SE "SOMATÓRIA DOS  $a_i$  COM  $i$  DE 1 A  $n$ ". A LETRA  $i$  É CHAMADA **ÍNDICE** DA SEQUÊNCIA.

A SOMATÓRIA DOS TERMOS CONSECUTIVOS DE  $a_p$  A  $a_q$ , INCLUINDO-OS, É:

$$\sum_{i=p}^q a_i = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$$



POR EXEMPLO, CONSIDERE A SEQUÊNCIA DE CINCO TERMOS  $\{2, 4, 8, 16, 32\}$ . AQUI  $a_i = 2^i \in n = 5$ .

$i$	$a_i$
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

NESTE CASO,

$$\sum_{i=1}^5 a_i = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

$$\sum_{i=2}^4 a_i = 4 + 8 + 16 = 28$$

OK... EU ACHO QUE ESTÁ SOB CONTROLE...





SE FÔSSEMOS DIVIDIR UMA TORTA  $P$  EM  $n$  FATIAS (POSSIVELMENTE DESIGUAIS), CHAMADAS  $\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3 \dots, \Delta P_n$ , ENTÃO, A TORTA INTEIRA SERIA A SOMA:

$$P = \sum_{i=1}^n \Delta P_i$$

ENTÃO, COMO GOSTAMOS DE FAZER EM CÁLCULO, ENCOLHEMOS O TAMANHO DESSAS FATIAS (A UM INFINITESIMAL  $dP$ , COMO LEIBNIZ GOSTAVA DE DIZER). NESSE PONTO ESCREVEREMOS A COISA COM UMA FORMA DIFERENTE DE "S", UMA FORMA ESPICHADA, CHAMADA **SINAL DA INTEGRAL**.

$$P = \int dP$$

PORQUE É COMO SE FOSSE SEMELHANTE A UMA SOMA...

POR QUE OUTRO "S"?

ESTE É MAIS UM SÍMBOLO QUE FOI CRIADO POR MIM...



O.K... ESTA É A NOSSA NOTAÇÃO... É SÓ SOMAR TUDO DAQUI PARA FRENTE...

EI!  
ESPERE  
UM  
MINUTO...



## UMA BOA QUESTÃO:

AGORA VOCÊ PODE SE PERGUNTAR, SE A SOMA É MAIS SIMPLES QUE A DIVISÃO E SE OS ANTIGOS JÁ FAZIAM INTEGRAIS MUITO ANTES DE NEWTON, POR QUE NÃO COMEÇAMOS O LIVRO COM ESTE CAPÍTULO?

CERTAMENTE VOCÊ NÃO ACHA QUE EU FIZ **ISTO** DESTE JEITO POR CONTA DE UM DESEJO PERVERSO DE TE **CONFUNDIR**?

NÃO ME TINHA OCORRIDO ATÉ O MOMENTO.



A RESPOSTA É SURPREENDENTE: EMBORA SOMAS POSSAM SER MAIS FÁCEIS DE **IMAGINAR**, ELAS PODEM SER MAIS BEM **CALCULADAS** USANDO **DERIVADAS!!** COMO DESCOBRIRAM NEWTON E LEIBNIZ HÁ UMA RELAÇÃO SURPREENDENTE ENTRE SOMAS E DERIVADAS!

COMO ESTAMOS PRESTES A VER...





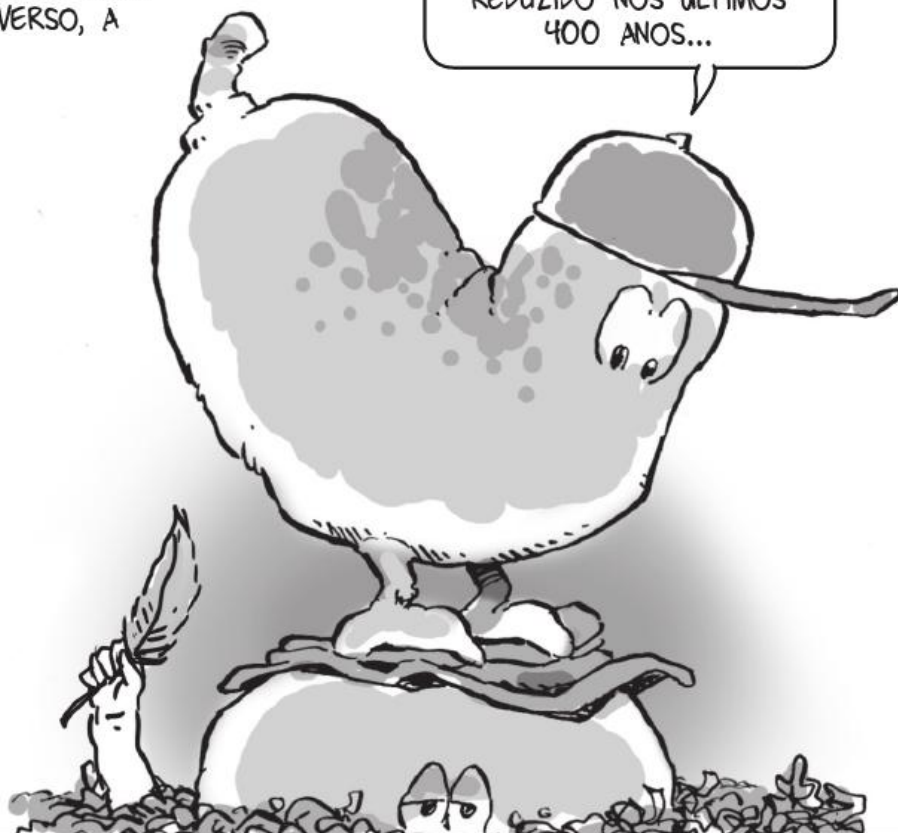
# CAPÍTULO 9

## PRIMITIVAS

MAIS UMA CONSTANTE!

INFELIZMENTE, O PROCESSO DE ENCONTRAR AS PRIMITIVAS OU ANTIDERIVADAS É **LIGEIRAMENTE** MAIS CONFUSO DO QUE O SEU INVERSO, A DIFERENCIAÇÃO.

POSSIVELMENTE, A FRASE CUJO SIGNIFICADO FOI MAIS REDUZIDO NOS ÚLTIMOS 400 ANOS...

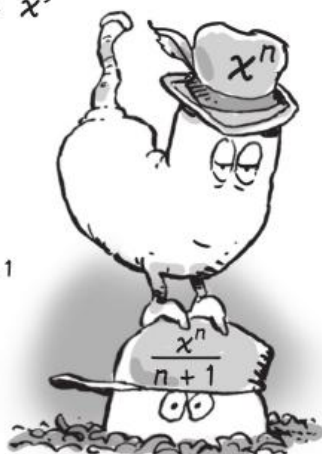


POR EXEMPLO, SE  $f(x) = x^3$ , ENTÃO  $f(x) = \frac{1}{4}x^4$  É UMA PRIMITIVA:

$$F'(x) = \frac{1}{4}(4x^3) = x^3$$

DE FORMA GENÉRICA,  $g(x) = x^n$  TEM COMO PRIMITIVA:

$$G(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$



ESTA É UMA PRIMITIVA DE  $g$  E NÃO A PRIMITIVA, POIS HÁ MUITAS OUTRAS. TODAS ESTAS TÊM COMO DERIVADA  $x^n$ :

$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 3$$

$$H(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 7$$

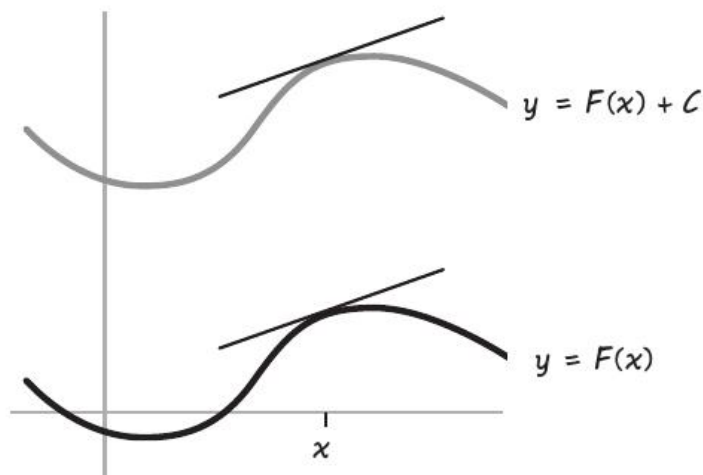
$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

ONDE  $C$  É UMA CONSTANTE QUALQUER.

PORQUE A DERIVADA DE UMA CONSTANTE É IGUAL A ZERO.



SE  $F$  FOR UMA PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO  $f$ , ENTÃO  $F + C$ , PARA QUALQUER CONSTANTE  $C$ , TAMBÉM SERÁ.  
 $(F + C)' = F' = f$ .  
 MOVER O GRÁFICO DE  $y = F(x)$  PARA CIMA E PARA BAIXO NÃO AFETA A INCLINAÇÃO NUM PONTO  $x$  QUALQUER.



POR OUTRO LADO, SE  $F' = f$ , ENTÃO QUALQUER PRIMITIVA DE  $f$  DIFERE DE  $F$  POR UMA CONSTANTE.

**PROVA:** SE  $G$  FOR OUTRA PRIMITIVA QUALQUER, ENTÃO  $(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0$  PARA TODO  $x$ . MAS PELA CONSEQUÊNCIA (3) DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO (PÁGINA 166), AS ÚNICAS FUNÇÕES COM DERIVADA NULA SÃO CONSTANTES, ASSIM,  $F - G = C$ , SENDO  $C$  UMA CONSTANTE QUALQUER.



AQUI ESTÁ COMO ESCREVER A FÓRMULA QUE SIGNIFICA "A PRIMITIVA DE  $f$  É  $F + C$ ":

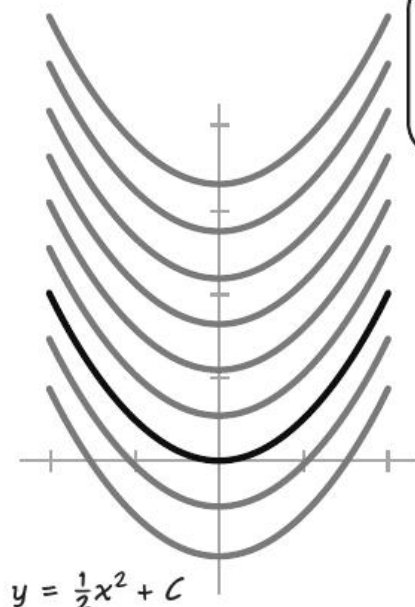
$$\int f = F + C \text{ OU } \int f(x) dx = F(x) + C$$

O SÍMBOLO ALTO É UM **SINAL DE INTEGRAL**... A FUNÇÃO  $f$  É CHAMADA **INTEGRANDO**. O SÍMBOLO  $dx$  ESTÁ LÁ APENAS PARA IDENTIFICAR A VARIÁVEL, COMO ESTÁ EM  $df/dx$ , E NÃO É UM TERMO SEPARADO NA EQUAÇÃO. E, COMO USUAL, O NOME DA VARIÁVEL NÃO IMPORTA: TODAS ESTAS EXPRESSÕES SIGNIFICAM A MESMA COISA, NOMEADAMENTE A PRIMITIVA DE  $f$ :

$$\int f(x) dx, \int f(t) dt, \text{ E } \int f(y) dy$$

A PRIMITIVA É, POR VEZES, CHAMADA **INTEGRAL INDEFINIDA** DE  $f$ . INDEFINIDA PORQUE É DETERMINADA SOMENTE ATÉ A CONSTATANTE  $C$  QUE SE SOMA. POR EXEMPLO,

$$\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$



TODAS ESTAS SÃO "A" INTEGRAL INDEFINIDA DE  $f(x) = x$ .

ISTO MEIO QUE DÁ UM NOVO SIGNIFICADO AO ARTIGO "A", NÃO É MESMO?



DEPOIS DE JÁ TERMOS CALCULADO MUITAS DERIVADAS, JÁ SABEMOS ESTAS FÓRMULAS:

$$\int dx = x + C$$

(HÁ UM NÚMERO 1 NÃO ESCRITO, APÓS O SINAL DE INTEGRAL.)

$$\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C$$

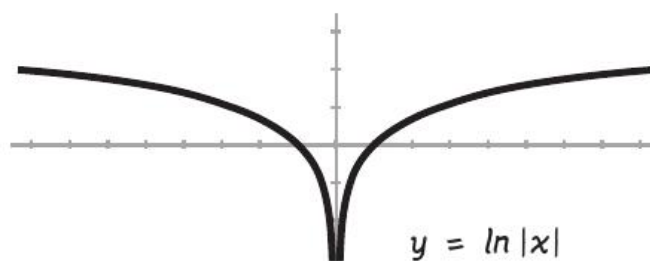
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

NOTE: O SINAL DE MÓDULO NA ÚLTIMA EQUAÇÃO É JUSTIFICADO, POIS, SE  $x < 0$ , ENTÃO

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{-1}{(-x)} = \frac{1}{x}$$

SE  $x > 0$ , ENTÃO  $\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$  TAMBÉM.

JUNTAS IMPLICAM  $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$



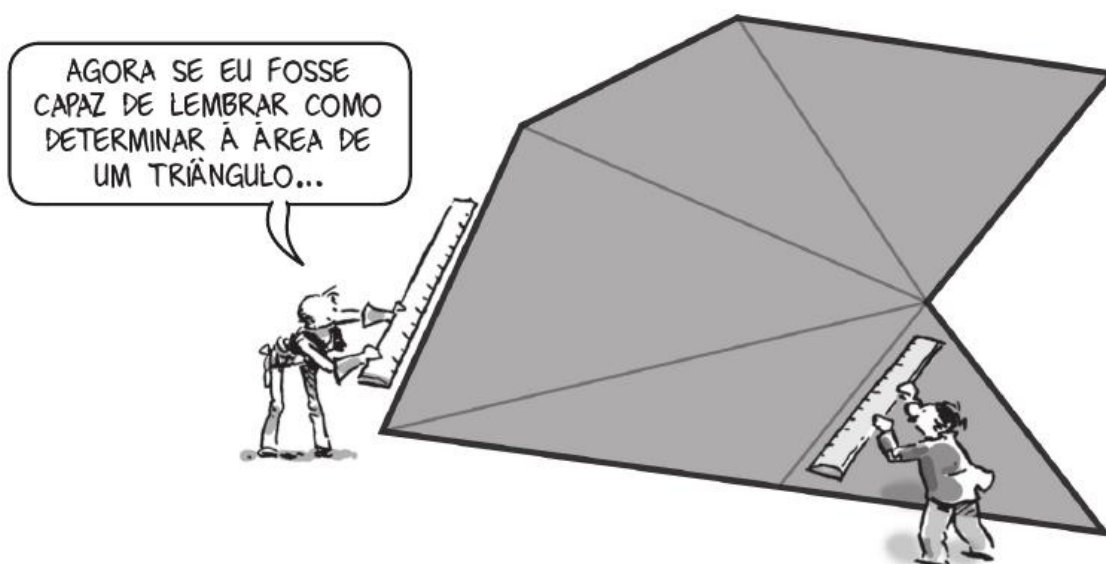


# CAPÍTULO 10

## A INTEGRAL DEFINIDA

ÁREAS, SOBRE E SOB

O QUE QUEREMOS DIZER AO FALARMOS DA ÁREA INTERNA A UMA FIGURA? SE A REGIÃO FOR RETANGULAR OU TRIANGULAR OU, AINDA, UM MONTE DE RETÂNGULOS E TRIÂNGULOS UNIDOS, TEMOS UMA IDEIA MUITO CLARA DO QUE SE TRATA: BASTA SOMAR A ÁREA DOS TRIÂNGULOS OU RETÂNGULOS.

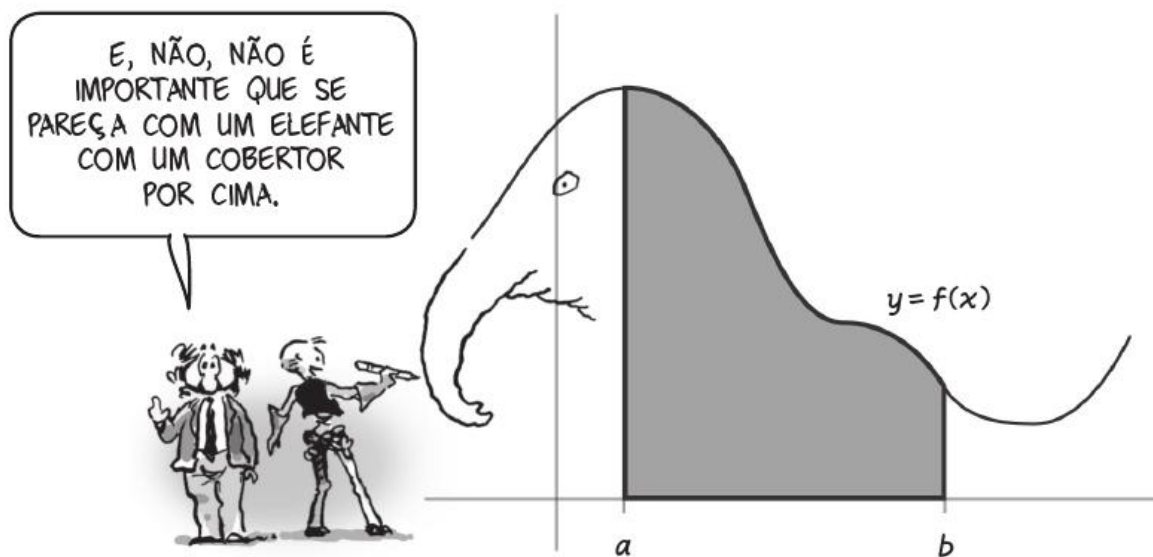


MAS E SE A FIGURA TIVER UM CONTOURNO CURVO? ENTÃO, QUAL SERIA A ÁREA?

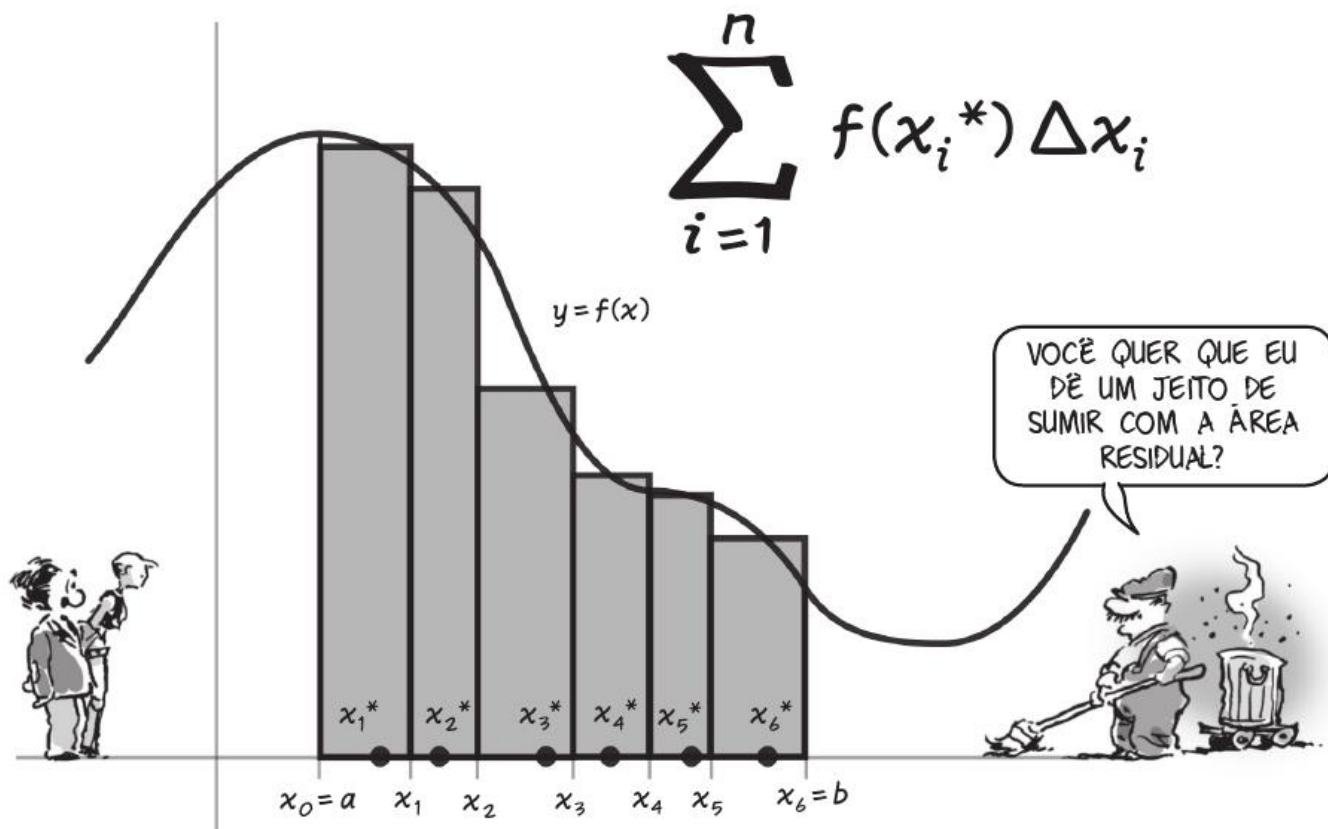


MAS SE VOCÊ CHEGOU ATÉ AQUI, PROVAVELMENTE SUSPEITA QUE A RESPOSTA TEM ALGO A VER COM O PROCESSO DE ENCONTRAR O LIMITE...

POR QUESTÃO DE SIMPLICIDADE, VAMOS CONSIDERAR UM TIPO ESPECIAL DE REGIÃO LIMITADA EM TRÊS LADOS POR LINHAS RETAS: A ESQUERDA E DIREITA PELAS LINHAS VERTICAIS  $x = a$ ,  $x = b$ , ABAIXO PELO EIXO  $x$  E ACIMA PELO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUALQUER  $y = f(x)$ , QUE ADMITIREMOS, NESTE MOMENTO, COMO SENDO APENAS POSITIVA. ESTA REGIÃO TEM APENAS UM LADO COM CURVAS.



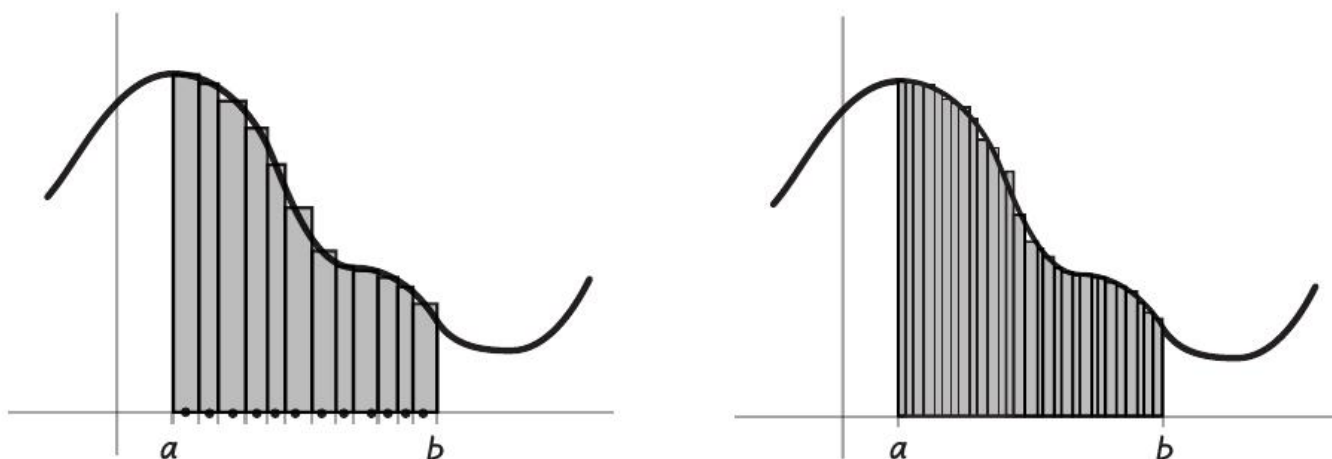
NOSSO PROCEDIMENTO SERÁ MAIS OU MENOS COMO O QUE FIZEMOS NA PÁGINA 171: SUBDIVIDIMOS O INTERVALO  $[a, b]$  EM  $n$  SUBINTERVALOS, ESPALHANDO OS PONTOS  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ , ONDE  $x_0 = a$  E  $x_n = b$ . PARA CADA  $i \geq 1$ , ESCOLHA QUALQUER PONTO  $x_i^*$  NO  $i$ -ÉSIMO INTERVALO  $[x_{i-1}, x_i]$ , E CONSTRUA UM RETÂNGULO NESTE INTERVALO COM ALTURA IGUAL A  $f(x_i^*)$ , TENDO COMO BASE  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . FINALMENTE, SOME AS ÁREAS DOS RETÂNGULOS PARA OBTER UM VALOR APROXIMADO DA ÁREA DESEJADA.



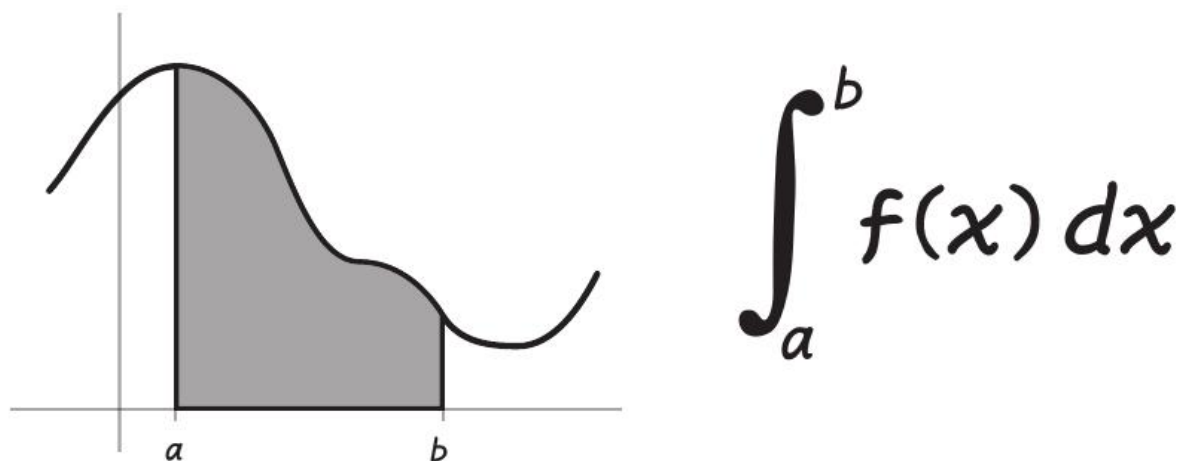
ESSA EXPRESSÃO É DENOMINADA **SOMATÓRIA DE RIEMANN**, EM HOMENAGEM A BERNHARD RIEMANN, UM MATEMÁTICO DO SÉCULO XIX QUE ERA TÃO ORIGINAL E BRILHANTE QUE RECEBEU ELOGIOS ATÉ MESMO DO GRANDE GAUSS, QUE NÃO ELOGIAVA NINGUÉM.



O PLANO, ENTÃO, É DEIXAR QUE AS SUBDIVISÕES FIQUEM CADA VEZ MENORES, SIGNIFICANDO QUE O MAIOR  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , E VERIFICAMOS SE A SOMA DAS ÁREAS RETANGULARES SE APROXIMA DE UM LIMITE.



A RESPOSTA (POR QUE ESPERAR?) É **SIM**, DESDE QUE A FUNÇÃO  $f$  SEJA CONTÍNUA NO INTERVALO  $[a, b]$  (VER PÁGINA 164). NESSE CASO, O VALOR LIMITANTE É CHAMADO **INTEGRAL DEFINIDA**, INTERPRETADA COMO A ÁREA SOB A CURVA E ESCRITA DA SEGUINTE FORMA:





# CAPÍTULO 11

## FUNDAMENTALMENTE...

NO QUAL TUDO SE JUNTA

NO CAPÍTULO 8, DESCOBRIMOS QUE A POSIÇÃO, PRIMITIVA DA VELOCIDADE, APARECIA COMO A ÁREA SOB O GRÁFICO DA VELOCIDADE. ESSE RESULTADO NÃO É COINCIDÊNCIA, COMO VIMOS. AS INTEGRAIS DE **TODAS** AS BOAS FUNÇÕES SÃO ENCONTRADAS A PARTIR DE SUAS PRIMITIVAS! SEM MAIS DELONGAS, ENTÃO, AQUI ESTÁ O...



## TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO V.1:

SE  $f$  FOR UMA FUNÇÃO CONTÍNUA NO INTERVALO  $[a, b]$  E  $F$  FOR QUALQUER PRIMITIVA DE  $f$  EM  $[a, b]$ , ENTÃO

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



ESTE TEOREMA EXTRAORDINÁRIO UNE DERIVADAS E INTEGRAIS. ELE DIZ: PARA CALCULAR UMA INTEGRAL DEFINIDA, ENCONTRE PRIMEIRO UMA PRIMITIVA DO INTEGRANDO, DEPOIS CALCULE ESSA PRIMITIVA NOS DOIS LIMITES E, FINALMENTE, FAÇA A DIFERENÇA! E ISSO É TUDO!

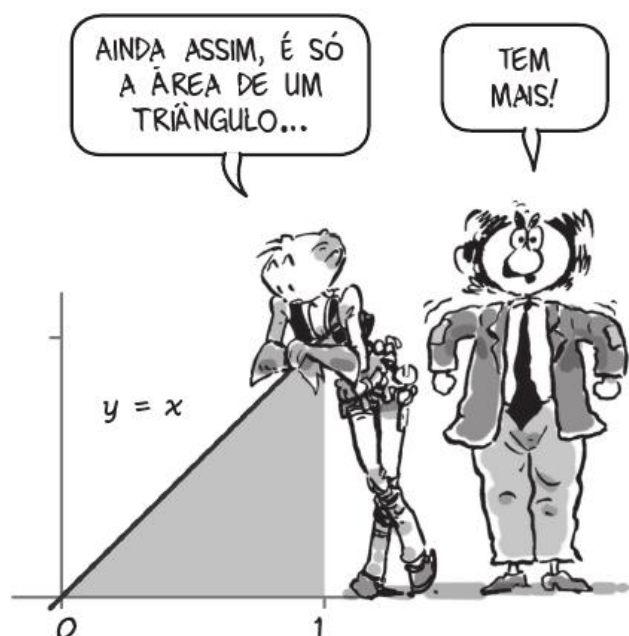


**EXEMPLO:** ENCONTRE  $\int_0^1 x \, dx$

PRIMEIRO, ENCONTRE A PRIMITIVA DE  $f(x) = x$ . SABEMOS QUE  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$  É UMA. O TEOREMA ENTÃO DIZ QUE:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \, dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

CONFORME VIMOS, COM MUITO MAIS DIFICULDADE, NAS TRÊS PÁGINAS ANTERIORES.



**EXEMPLO:**  $\int_{-1}^5 x^3 \, dx$

SABEMOS QUE  $F(x) = \frac{1}{4}x^4$  É UMA PRIMITIVA, ASSIM A INTEGRAL É

$$\begin{aligned}F(5) - F(-1) &= \frac{1}{4}(5)^4 - \frac{1}{4}(-1)^4 \\ &= \frac{625 - 1}{4} = 156\end{aligned}$$

ESTA DIFERENÇA É NORMALMENTE ESCRITA

$$\left. \frac{1}{4}x^4 \right|_{-1}^5$$

**EXEMPLO:**  $\int_0^b x^n \, dx$

$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  É UMA PRIMITIVA, ASSIM

$$\int_0^b x^n \, dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^b = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

**EXEMPLO:**  $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta =$

$$\begin{aligned}-\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos 0) \\ &= 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

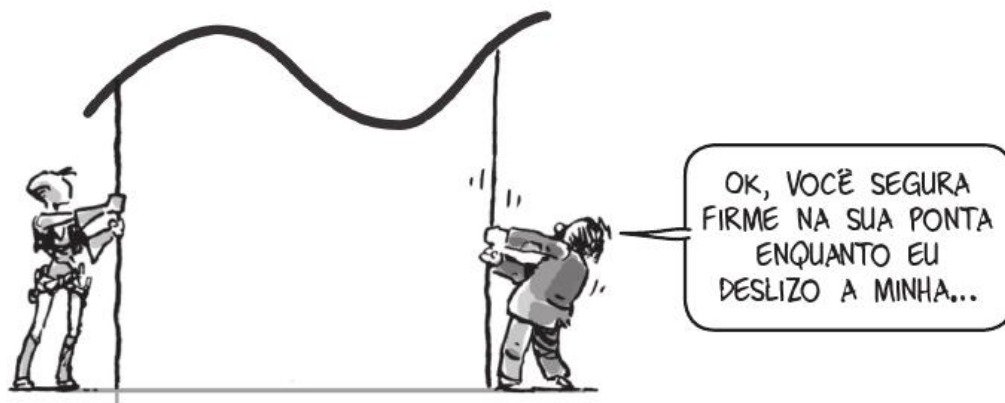
**EXEMPLO:**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+u^2} \, du &= \arctan u \Big|_0^1 \\ &= \arctan 1 - \arctan 0 \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

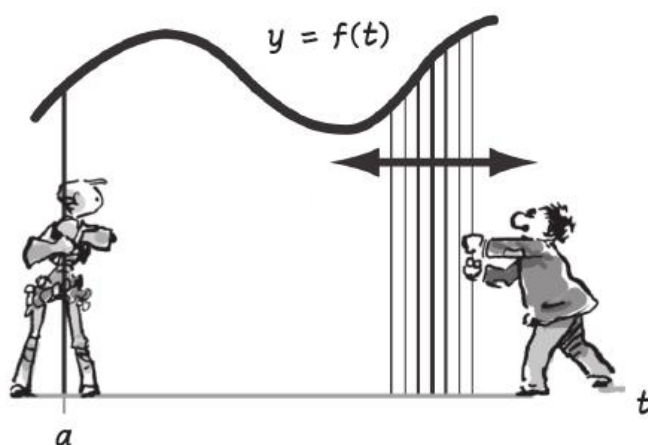
(AQUI FIZEMOS  $u$  COMO A VARIÁVEL DE INTEGRAÇÃO SÓ PARA LEMBRAR A VOCÊ QUE QUALQUER LETRA SERVE!)



AQUI ESTÃO ALGUNS MODOS DE ENTENDER A RELAÇÃO FUNDAMENTAL ENTRE DERIVADAS E INTEGRAIS. UM É VER DIRETAMENTE POR QUE A "DERIVADA DA ÁREA" É A PRÓPRIA FUNÇÃO ORIGINAL. PARA FAZER ISTO, TEMOS DE TRANSFORMAR A INTEGRAL NUMA FUNÇÃO.



BEM, DADA UMA FUNÇÃO  $f$ , FIXAMOS UMA EXTREMIDADE DA INTEGRAÇÃO E DEIXAMOS A OUTRA EXTREMIDADE VARIAR. ASSIM, A ÁREA TAMBÉM VARIA: A ÁREA SE TORNA UMA **FUNÇÃO DA SEGUNDA EXTREMIDADE**.

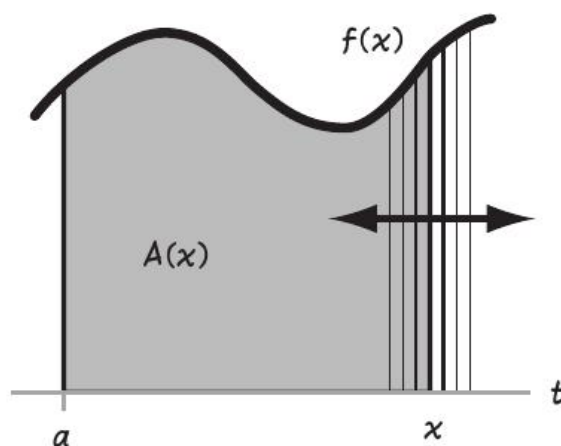


SE  $x$  FOR UMA EXTREMIDADE VARIÁVEL E  $A(x)$  A ÁREA, PODEMOS ESCREVER ESTA ÁREA\* COMO SENDO

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

ENTÃO, O QUE ESTAMOS DIZENDO É:

$$A'(x) = f(x)$$



\* POR ÁREA, SEMPRE QUEREMOS DIZER QUE SE TRATA DA ÁREA ASSINALADA. TAMBÉM TEMOS DE ADMITIR A POSSIBILIDADE DE QUE A EXTREMIDADE VARIÁVEL ESTEJA À **ESQUERDA** DE  $a$ , CASO NO QUAL, CONCORDAMOS QUE

$$\int_a^x f(t) dt \text{ É IGUAL A } -\int_x^a f(t) dt$$



## CAPÍTULO 12

# INTEGRAIS QUE MUDAM DE FORMA

MAIS JEITOS DE ENCONTRAR PRIMITIVAS

PARA INTEGRAR UMA FUNÇÃO, "TUDO" O QUE TEMOS DE FAZER É ENCONTRAR A SUA PRIMITIVA. MAS ISTO PODE NÃO SER FÁCIL... A FUNÇÃO PODE NÃO PARECER FAMILIAR... PODEMOS NÃO RECONHECÊ-LA COMO SENDO A DERIVADA DE OUTRA... PODE PARECER DESANIMADOR... ASSIM, OS MATEMÁTICOS DESENVOLVERAM MÉTODOS PARA IR ARRUMANDO AS INTEGRAIS DE MODO A SER MAIS FÁCIL DE "DESVENDÁ-LAS..."



# SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEIS

DE AGORA EM DIANTE VAMOS ADOTAR A NOTAÇÃO DE LEIBNIZ E USAREMOS  $dx$ ,  $dt$ ,  $du$ ,  $dv$ ,  $df$  ETC., COMO SE FOSSEM QUANTIDADES PEQUENAS. NÃO SE PREOCUPE COM ISTO! ISTO TORNA A VIDA MAIS FÁCIL E REALMENTE NÃO TE DEIXARÁ EM DIFICULDADES...



VAMOS COMEÇAR COM ESTA EQUAÇÃO BÁSICA, QUANDO  $u$  É UMA FUNÇÃO DE  $x$ :

$$\frac{du}{dx} = u'(x)$$

QUE PASSA A SER

$$du = u'(x) dx$$

QUE REALMENTE CORRESPONDE A

$$\int du = \int u'(x) dx = u + C$$

QUE SABEMOS SER VERDADEIRA PELO TEOREMA FUNDAMENTAL!



AGORA VAMOS COLOCAR OUTRA FUNÇÃO  $v$  NA CADEIA, EM QUE  $v$  É UMA FUNÇÃO DE  $u$ . ASSIM COMO ANTES

$$dv = v'(u) du$$

SUBSTITUA  $du = u'(x) dx$  PARA OBTER

$$dv = v'(u(x)) u'(x) dx$$



QUE É OUTRO MODO DE ESCREVER A REGRA DA CADEIA. ISTO SIGNIFICA QUE

$$v + C =$$

$$\int v'(u) du = \int v'(u(x)) u'(x) dx$$



POR QUE ISTO AJUDA? PORQUE NOS PERMITE SIMPLIFICAR OU TRANSFORMAR A INTEGRAL DA DIREITA NAQUELA DA ESQUERDA!!! PELA **SUBSTITUIÇÃO** DE  $du$  POR  $u'(x)dx$ , OBTAMOS UMA INTEGRAL DE APARÊNCIA MUITO MAIS SIMPLES!!!



**EXEMPLO 1:** ENCONTRE  $\int 2t \cos(t)^2 dt$

SEJA  $u = t^2$ , ENTÃO  $du = 2t dt$ , E A INTEGRAL PASSA A SER

$$\begin{aligned}\int 2t \cos(t)^2 dt &= \int \cos u du \\ &= \sin u + C \\ &= \sin(t)^2 + C\end{aligned}$$



AQUI ESTÁ O PROCEDIMENTO PASSO A PASSO:

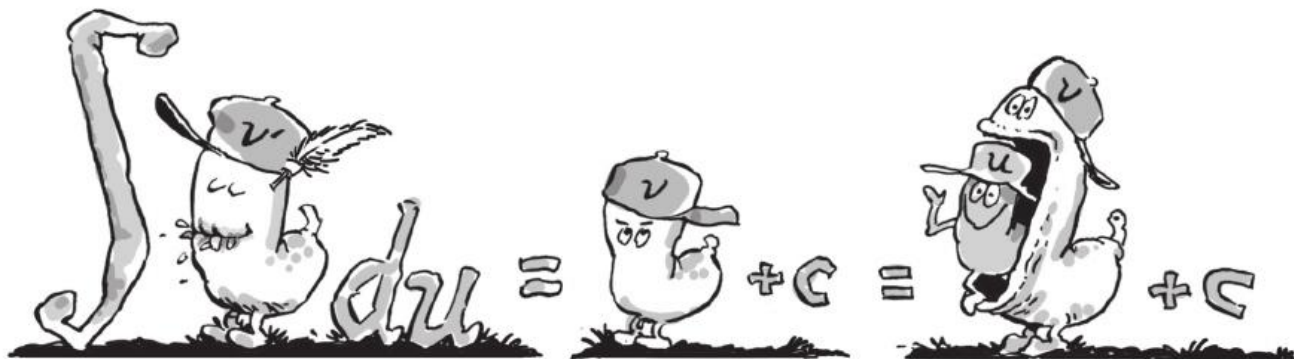
**1.** PROCURE POR UMA FUNÇÃO INTERNA  $u$  CUJA DERIVADA  $u'$  TAMBÉM APAREÇA COMO FATOR NO INTEGRANDO.

**2.** ESCREVA  $du = u'(t) dt$  (OU  $u'(x) dx$ , OU QUALQUER QUE SEJA A VARIÁVEL).



**3.** EXPRESSE TUDO EM TERMOS DE  $u$ .

**4.** TENTE A INTEGRAÇÃO EM RELAÇÃO A  $u$ . SE TIVER SUCESSO, SUBSTITUA  $u$  POR  $u(t)$  NA RESPOSTA.





## CAPÍTULO 13

# USANDO INTEGRAIS

SABIA QUE ESTE NEGÓCIO SERVE REALMENTE PARA ALGUMA COISA?

AS INTEGRAIS ESTÃO POR TODA A PARTE... BASTA VOCÊ TER OLHOS PARA ENCONTRÁ-LAS.

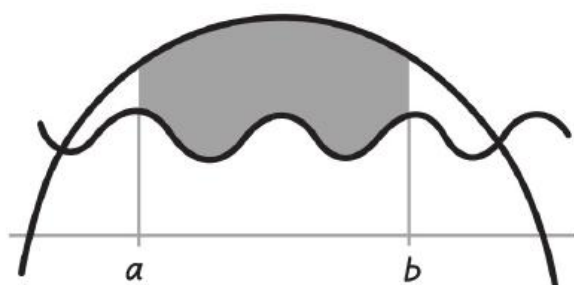
NESTE CAPÍTULO, ENCONTRAREMOS AS INTEGRAIS EM FUNCIONAMENTO NA GEOMETRIA, NA FÍSICA, NA ECONOMIA, NA ESTATÍSTICA, NOS NEGÓCIOS... ESTAS COISAS SE ACUMULAM EM PRATICAMENTE TODO LUGAR.

EU JÁ DISSE QUE AS INTEGRAIS SÃO AS CHAVES QUE ABREM OS SEGREDOS DO UNIVERSO?



# ÁREAS E VOLUMES

PODEMOS ENCONTRAR A ÁREA ENTRE DOIS GRÁFICOS INTEGRANDO A DIFERENÇA ENTRE DUAS FUNÇÕES.



NOSSA! AGORA  
PODEMOS  
DESCOBRIR QUAL O  
TAMANHO DA SUA  
CARECA!!

**EXEMPLO:** ENCONTRE A ÁREA  
ENTRE AS DUAS PARÁBOLAS

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad \text{e}$$

$$y = g(x) = -2x^2 + 4.$$

SOLUÇÃO: PRIMEIRO ENCONTRE OS  
PONTOS EM QUE AS CURVAS SE CRUZAM,  
OU SEJA, OS VALORES DE  $x$  PARA

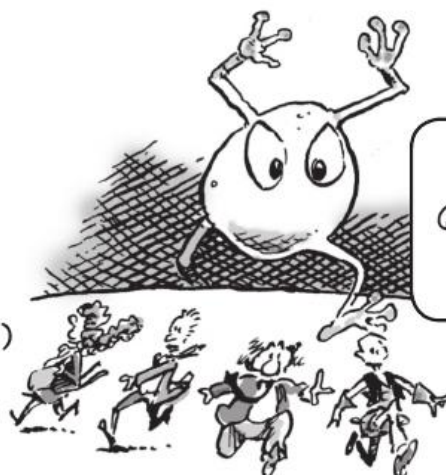
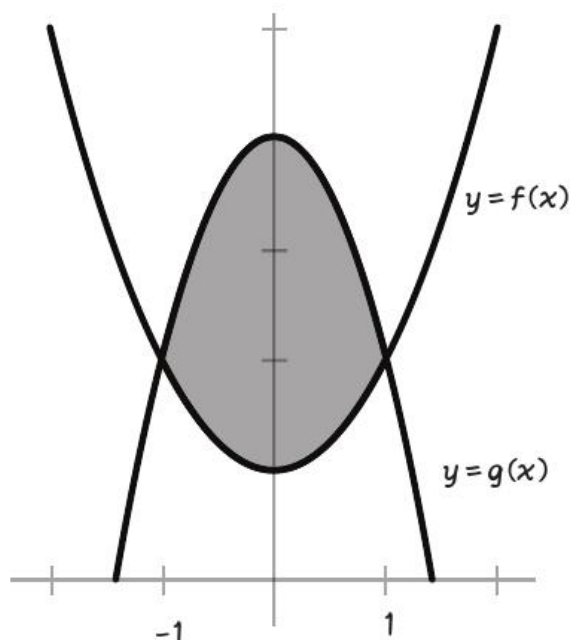
$$x^2 + 1 = -2x^2 + 4.$$

ISTO IMPLICA

$$3x^2 = 3 \quad \text{OU} \quad x = \pm 1.$$

AGORA INTEGRAMOS  $g - f$  DE  $-1$  A  $1$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x) - f(x) \, dx &= \int_{-1}^1 -3x^2 + 3 \, dx \\ &= (-x^3 + 3x) \Big|_{-1}^1 = -1 + 3 - (-1 + 3) \\ &= 4 \end{aligned}$$

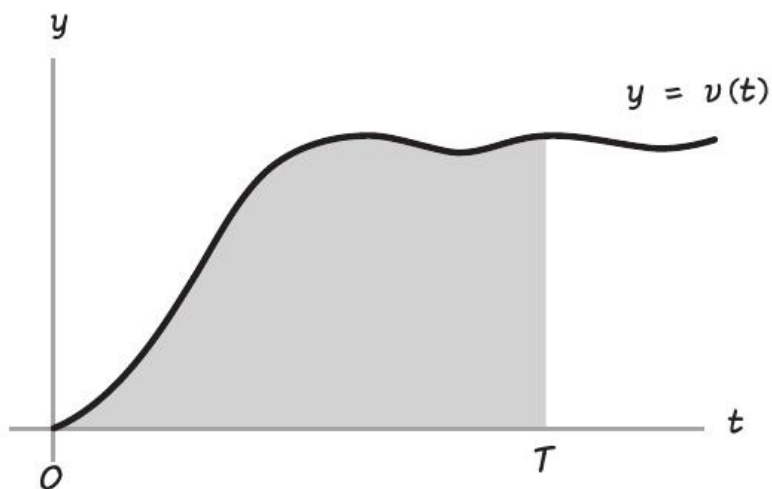


AO MENOS  
SABEMOS O  
QUÃO GRANDE  
É A CARA  
DELA!

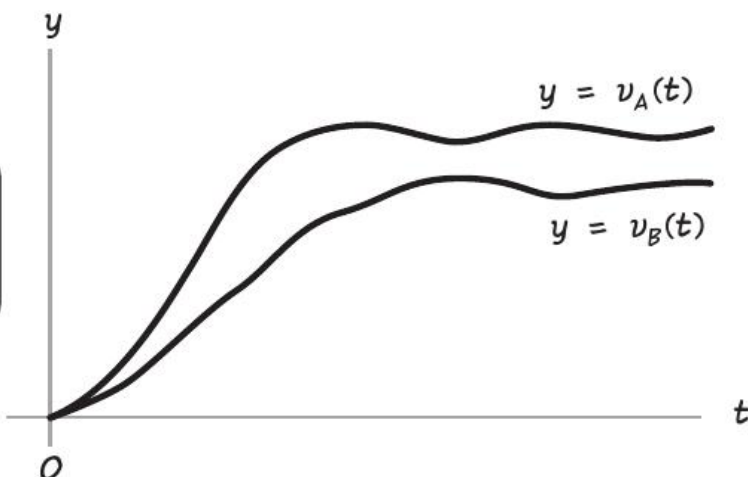
NO MUNDO REAL PODEMOS VER ALGO ASSIM: AQUI ESTÁ A FUNÇÃO VELOCIDADE  $v = v(t)$  QUE DESCREVE UM CARRO ACELERANDO DESDE UMA PALAVRA, COMEÇANDO NO MARCO ZERO DE UMA ESTRADA. A ÁREA SOB A CURVA ENTRE 0 E  $T$ ,

$$\int_0^T v(t) dt$$

É A POSIÇÃO DO CARRO NO INSTANTE  $T$ .



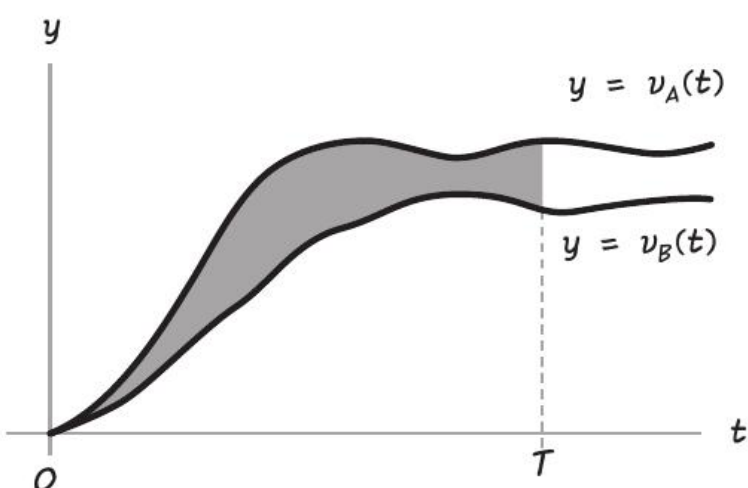
SE UM AUDI (A) E UM BMW (B) SAEM AMBOS, AO MESMO TEMPO, DO MESMO SEMÁFORO, OS GRÁFICOS DAS SUAS VELOCIDADES PODEM PARECER COM ESTES\*:



ENTÃO, A ÁREA (ASSINALADA) ENTRE OS GRÁFICOS  $v_A$  E  $v_B$  É O QUÃO DISTANTE O AUDI ESTÁ ADIANTE DO BMW. ISTO É

$$\int_0^T v_A(t) - v_B(t) dt$$

(QUE PODERIA SER NEGATIVA, CASO O BMW ESTIVESSE NA FRENTE).



\* ISTO ADMITE QUE A BMW PAROU COMPLETAMENTE. EU MESMO NUNCA VI ISTO PESSOALMENTE, MAS CONTINUO TENDO ESPERANÇAS DE QUE POSSA ACONTECER ALGUM DIA.



## CAPÍTULO 14

# O QUE VEM DEPOIS?

LEITOR, ESTE LIVRO ESTÁ APENAS COMEÇANDO... HÁ MUITO MAIS COISAS QUE VOCÊ PODE FAZER COM O CÁLCULO. É UMA FERRAMENTA PODEROSA, USADA EM TODAS AS CIÊNCIAS SOCIAIS, BIOLÓGICAS E FÍSICAS, NA ENGENHARIA, NA ECONOMIA E NA ESTATÍSTICA, ALÉM DE SUAS IDEIAS TEREM SIDO AMPLIADAS POR VÁRIAS GERAÇÕES DE MATEMÁTICOS DESDE NEWTON E LEIBNIZ.



AQUI ESTÃO MAIS ALGUNS TÓPICOS AVANÇADOS QUE VOCÊ PODE ENCONTRAR NO CAMINHO:

# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

ALÉM DE DESCOBRIR O CÁLCULO, NEWTON TAMBÉM ESTABELECEU UMA LEI FÍSICA FAMOSA QUE RELACIONA FORÇA E VELOCIDADE:

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

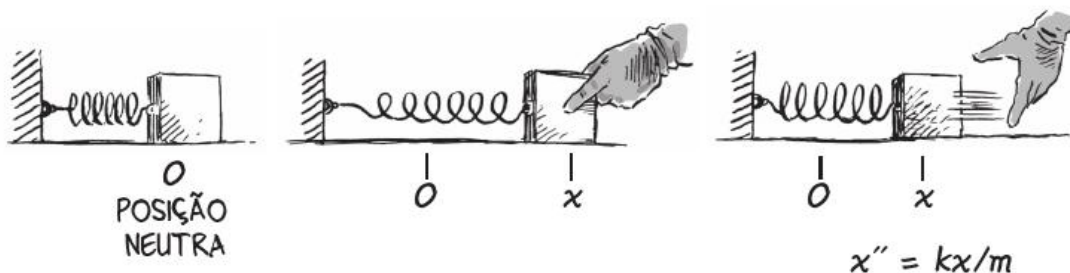
QUALQUER EQUAÇÃO QUE CONTENHA DERIVADAS, TAL COMO ESTA, É CHAMADA **EQUAÇÃO DIFERENCIAL**.



OUTRA EQUAÇÃO DIFERENCIAL É A LEI DE HOOKE OU EQUAÇÃO DA MOLA. SE UMA MASSA  $m$  É DESLOCADA DE  $x$  UNIDADES, DESDE A POSIÇÃO NEUTRA DA MOLA, E SOLTA EM SEGUIDA, ENTÃO A QUALQUER TEMPO SUA ACELERAÇÃO É PROPORCIONAL AO SEU DESLOCAMENTO:

$$x''(t) = \frac{k}{m}x(t) \text{ OU, DADA A PRIMEIRA LEI DE NEWTON, } F = kx$$

( $k$  É UMA CONSTANTE QUE DEPENDE DA RIGIDEZ DA MOLA.)



O UNIVERSO É DESCRITO POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, E RESOLVÊ-LAS É A TAREFA Nº 1 EM CIÊNCIA.



# MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

ESTE PONTO DESCREVE AS FUNÇÕES QUE VARIAM EM REGIÕES DO ESPAÇO, EM VEZ DE APENAS AO LONGO DO EIXO  $x$ . UMA VEZ QUE O ESPAÇO EM QUE VIVEMOS TEM AO MENOS TRÊS DIMENSÕES, ESTE É UM ASSUNTO OBVIAMENTE IMPORTANTE!



## SEQUÊNCIAS E SÉRIES

COMO SUA CALCULADORA DE BOLSO CALCULA SENOS E COSSENOS? VOCÊ SE SURPREENDERIA AO SABER QUE

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots$$

OH? EU NÃO ME SURPREENDERIA? BEM, ESQUECE, VAI...



## INTEGRAIS DE LINHA E DE SUPERFÍCIE

ESTAS SÃO MANEIRAS DE INTEGRAR AO LONGO DE CURVAS OU PELAS SUPERFÍCIES, EM VEZ DAS TRADICIONAIS E MONÓTONAS LINHAS RETAS.



## VARIÁVEIS COMPLEXAS

QUANDO FAZEMOS O CÁLCULO COM UM NÚMERO ERRONEAMENTE CHAMADO "IMAGINÁRIO", O  $i = \sqrt{-1}$ , COISAS ESPETACULARES ACONTECEM!

AS VARIÁVEIS COMPLEXAS NÃO SÓ DESCREVEM, DO "JEITO CERTO", ELETRICIDADE, MECÂNICA QUÂNTICA E OUTROS RAMOS DA FÍSICA, MAS ELAS REVELAM RELAÇÕES MATEMÁTICAS PROFUNDAS, TAIS COMO ESTA EQUAÇÃO ESPANTOSA:





# ÍNDICE



- A**
- Aceleração 144-45, 215
    - na Lei de Hooke, 238
  - Acelerômetros, 145
  - Adição, 28, 169-71, 175
    - derivadas e 92, 171
  - Água
    - pressão de, 235
    - volume de, 129
  - Altitude, 21, 95, 229
  - Ângulo, comparação com seu seno, 76-77
  - Antiderivativas (integrais indefinidas (primitivas)), 175, 177-84, 193, 195
    - Fundamental, Teorema de Cálculo, 193, 195-202
    - Cálculos e, 117, 195-202
    - problemas para resolver, 184
  - Arco seno, 57, 107, 114
  - Arco tangente, 58, 107, 114
  - Áreas, 173-74, 185-86, 195, 197, 214-16
    - coordenadas polares, 217-18
    - de um círculo, 217-18
  - Atmosfera, 21, 229-31
  - Avião, exemplos, 125-26, 130
  - Azeite, exemplo do, 140-41
- B**
- Balão, volume de um, 21-22
- C**
- Cama elástica, exemplos, 93, 137-39
  - Carro, exemplos de, 13-15, 63, 85-86, 90, 136, 145, 172-75, 215-16
  - Círculo, área do, 217-18
  - Circulares (trigonômicas), funções, 43-45
    - derivadas de, 114-5
    - inversas, 57-59
    - limites e, 66
  - Coeficientes, 32
  - Cola, exemplo da fábrica de, 221-25
  - Complexas, variáveis, 239
  - Composição de funções, 46-47
  - Cone, volume do, 220
  - Constantes, 31, 92, 167, 177-79, 193
  - Coordenadas
    - polares, 217-18
    - retangulares, 207
  - Cosseno, 43-45, 57, 239
    - derivadas e, 98-100
    - limites e, 82
  - Crescentes, funções, 51-53
  - Custo de vida, 95
- D**
- Decaimento radioativo, 42
  - Delta, 71
  - Densidade, 228-29
  - da atmosfera, 229-30
  - populacional, 231-33
  - probabilidade, 233
  - Derivadas, 85-108, 161, 169, 171
    - aproximações e, 156, 161
    - constantes e, 92, 167
    - cosseno, 99
    - diferenciação implícita e, 127, 131, 148
    - definição de, 89
    - em exemplos de altitude, 93
    - em exemplos de avião, 125-27, 130
    - em exemplos de carros, 85-86, 90
    - em exemplos de fluxo, 95
    - exemplo da cama elástica, 93
    - exemplo de custo de vida, 95
    - exemplo da mancha de óleo, 128
    - exemplo de foguete, 89-90
    - exemplo do volume d'água, 129
    - exponenciais, 100, 115
    - equações diferenciais, 238
    - fator de escala e, 118, 122-23
    - fatos a respeito, 92, 102, 105
    - funções potência, 115
    - funções inversas, 112-15, 122
    - funções trigonométricas, 114-15
    - linhas e, 153-62
    - notação de, 96-97
    - otimização e, 133-52, 161
      - em exemplo da cama elástica, 137-39
      - em exemplo da ovelha, 147
      - em exemplo da tubulação, 148-49
      - em exemplo do azeite, 140-41
      - problemas para resolver, 152
    - potências negativas e, 106
    - primitivas (integrais indefinidas), 175, 177-84, 193, 195
      - problemas para resolver, 184
      - Teorema Fundamental do Cálculo e, 193, 195-202
    - problema da inclinação da estrada, 95
    - problemas para resolver, 108, 124, 132, 152, 162, 184
    - produtos, 202-04
    - quocientes e, 205-06
    - Regra da cadeia, 109-26, 182, 204
      - em cadeias com mais de duas funções, 117
      - exemplos de, 116
      - passos, 110
      - problemas para resolver, 124
    - Regra de L'Hôpital, 158-61
    - Regra de potência e, 91, 115
    - seno, 98-99
    - somas e, 92, 171
    - tangente, 106
    - taxas relacionadas e, 125-32, 161
      - problemas para resolver, 132

- Teorema do valor médio e, 167, 178  
 Teorema Fundamental do Cálculo e, 193, 195-202  
 Teste da segunda derivada, 143, 146, 149-51  
 variações na, 143  
 velocidade, 85-87, 89-90, 93, 95  
 Diferenciação, 91, 144, 164, 174, *ver também*  
*Derivadas*  
   implícita, 127, 131, 148  
   reversa, 175, 177  
 Distância, Trabalho e, 234  
 Divisão  
   de funções, 28  
   por zero, 28  
 Domínios, 23-24  
   restrição de, 56
- E**  
 Eixo, 16  
 Epsilon, 65, 68, 71  
 Equação de mola, 236  
 Equação Fundamental do Cálculo, 121, 153-54  
 Equações diferenciais, 238  
 Escala, fator de, 118, 122-23  
 Esfera, volume da, 21-22, 218-20  
 Estatística, 233  
 Estrada, inclinação, 95  
 Exponencial, 37-42, 52-53, 55  
   derivadas de, 100, 115  
   exemplo de decaimento radioativo, 42  
   exemplo de juros compostos, 38-40, 42, 100-01  
   limites e, 66  
 Extremos, locais, 135, 151
- F**  
 Fluxo, taxa de, 95  
 Fluxões, 16, 94  
 Foguete, velocidade, 89-90  
 Força, 145, 234-35, 238  
 Fórmulas, 22  
 Funções, 19-60  
   adição, 28  
   cadeias de, 47  
   circulares (trigonométricas), 43-45, 66  
     derivadas, 114-15  
     inversas, 57-59  
     limites e, 66  
   comparação de, 158-61  
   composição de, 46-47  
   composta, 107, 110  
   constante, 31, 167  
   contínuas, 164-65, 167, 188, 190-91  
   crescentes, 51-53, 167  
   decrecentes, 51-53  
   definição de, 19-20  
   designando letras, 22  
   derivadas, *ver também Derivadas*  
   diferenciação de, 91, 144, 164, 174  
     implícitas, 127, 131, 148  
     reversa, 175, 177  
   divisão, 28  
   domínios de, 23-24  
     de, restrição, 56  
   elementares, 29-59, 117, 144  
     limites, 66  
   exemplo da altitude, 21  
   exemplo do volume do balão, 21-22  
   exponencial, 47-52, 62-63, 65, 76  
     derivadas de, 100, 115  
     exemplo de juros compostos, 38-40, 42, 100-01  
     exemplo do decaimento radioativo, 42  
     limites, 66  
   externas, 46  
   gráficos de, 26-27  
     de, inversas, 54-56  
   injetora, 50-52, 56  
   integração de, *ver Integração*  
   internas, 46  
   intervalos curtos, 121  
   inversas, 48-50, 52, 66, 107  
     circulares, 57-59  
     derivadas de, 112-15, 122  
     limites e, 66  
   maximização e minimização, 134-35, 139, 142-43, 150-51, 163, 165  
   módulo, 30, 157  
   multiplicação, 28  
   polinômios, 32  
     derivadas, 115  
     razões de, 34-36  
   potências, 31, 150  
     derivadas, 33, 47  
     fracionárias, 33, 47  
     inclinação do gráfico, 88  
     limites e, 66  
     negativas, 33  
       derivadas e, 106  
     polinômios e, 32  
     problema para resolver, 60, 168  
     racionais, 34-36  
   Teorema de Rolle, 165-66  
   teorema do valor extremo, 165  
   teorema do valor médio, 163-68, 178  
   valores aproximados de, 156, 161
- G**  
 Garfield, James, 131  
 Gauss, Carl Friedrich, 187  
 Gráficos, 26-27  
   de inversas, 54-56  
   encontrando a área entre dois, 214-16  
 Graus, Polinômios, 32, 80



## H

Hooke, Lei de, 238

## I

Implícita, diferenciação, 127, 131, 148

Impróprias, Integrais, 224-27

Inclinação, Estrada, 95

Indefinidas, integrais (antiderivativas), 175, 177-84, 193, 195

problemas para resolver, 184

Teorema Fundamental do Cálculo, 193, 195-202

Índice, sequências, 170

Infinito, 32, 129, 160, 163, 226-27

intervalos e, 24

limites e, 78-79, 224

polinômios e, 80-83

Inflação, 95

Inflexão, Ponto de, 146

Integração, 169-76, 180-81, *ver também* Integrais

exemplo do limpador de para-brisa, 191

por partes, 209-11

problemas para resolver, 176, 212, 236

substituição de variáveis na, 204-06

integral definida e, 207-08

Integrais, 203-212, 213-36, *ver também* Integração

áreas e, 214-16

coordenadas polares, 217-218

definidas, 185-94

problemas para resolver, 194

substituição e, 207-208

densidade, 228-29

atmosfera, 229-30

populacional, 231-33

probabilidade, 233

exemplo da fábrica de cola, 221-25

impróprias, 224-27

indefinidas (antiderivativas), 175, 177-84, 193, 195

problemas para resolver, 184

linha e superfície, 239

pressão de água e, 235

Teorema fundamental do Cálculo e, 193, 195-202

Trabalho e, 234

volume

de um cone, 220

de um parabolóide, 221

de uma esfera, 218-20

Integrando, 178, 181-82, 227

Intervalos, 24

muito curtos, 121

Inversas, 38-40, 42, 97

circulares, 57-59

derivadas de, 112-15, 122

gráficos de, 54-56

limites e, 66

## J

Juros compostos, 38-40, 42, 100-01

## L

L'Hôpital, Regra de, 158-61

Leibniz, Gottfried, 11-12, 15-18, 62, 94, 103, 161, 169, 171, 193, 199, 240

notação, 96-97, 204

Lemas (teoremas preliminares), 72-73, 75

Limites, 61-84

ausência de, 82

coseno e, 82

definição de, 68, 70-71, 74

fatos sobre, 67, 74

prova, 71-75

Infinito e, 78-79, 224

positivo e negativo, 74

problemas para resolver, 84

Seno e, 82

Teorema do Sanduíche, 75-77

teoremas preliminares (Lemas), 72-73, 75

versão algébrica, 75

versão intervalo, 70

Limpador de para-brisa, 191

Linha, integral de, 239

Linhas, 153-62

Locais,

máximos e mínimos, 135, 139, 142-43, 150

pontos extremos (locais ótimos), 135, 151

Logaritmos, 52-53, 55, 107, 114, 115

## M

Massa, 145

densidade e, 228, 230

Lei de Hooke, 238

Máximos e mínimos, 134-35, 163, 165

globais, 151

locais, 135, 139, 142-43, 150

Medidor de velocidade escalar, 11-12, 15

Módulo, 20, 147

Mola, equação, 228

Movimento, 10-11

derivada de função e, 94

Múltiplas variáveis, 239

Multiplicação, 28, 169

## N

Negativas, potências, 33

Negativo, número, 23

Newton, Isaac, 11-12, 15-18, 62, 93-94, 137-39, 145, 161, 169, 171, 193, 204, 238, 240

Números, Linhas de, 20, 25

## O

Óleo, exemplo da mancha, 128

Otimização, 133-52, 161

exemplo da tubulação, 148-49  
exemplo do azeite, 140-41  
problema das ovelhas, 147  
problemas para resolver, 152  
Ovelha,  
exemplo, 147

## P

Parábolas, 214, 221  
Paraboloide, 221  
Pequenez, 119-21  
Pi, 207  
Pitágoras, 44, 131  
Polares, coordenadas, 217-18  
Polinômios, 32  
coeficientes, 32  
derivadas, 115  
graus, 32, 80  
infinito, 80-83  
razões de, 34-36  
Teorema do Crescimento, 80  
População, Densidade, 231-33  
Posição, 13-14, 17, 21, 95, 144, 195  
encontrando a velocidade, 175-78  
Potências, 31, 150  
declividade do gráfico, 88  
derivadas, 106, 115  
fracionárias, 33, 47  
limites e, 66  
negativas, 33  
limites e, 106  
polinômios e, 32  
Pressão, gradiente, 95  
Primitivas  
antiderivativas (integrais indefinidas) 175, 177-84, 193, 195  
problemas para resolver, 184  
Teorema Fundamental do Cálculo, 193, 195-202  
Probabilidade, densidade (distribuição de probabilidade), 233  
Produção econômica, 151  
Produtos, derivadas de, 102-04

## Q

Quocientes, derivadas e, 105-06

## R

Racionais, funções, 34-36  
Radianos, 43-44, 76-77  
Raiz quadrada, 23, 115  
Regra da Cadeia, 109-24, 125-26, 182, 204  
diferenciação de cadeias com mais de duas funções, 117  
em derivadas de função inversa, 112-15  
exemplos de derivadas encontradas com, 116

passos, 110  
problemas para resolver, 124  
Regra da Potência, 91, 115  
Retangulares, coordenadas, 217  
Riemann, Bernhard, 187  
Riemann, Somas de, 187-90, 192  
Rolle, Teorema de, 165-66

## S

Sanduíche, Teorema do, 75-77  
Secante, 43-44  
Segunda derivada, teste da, 143, 146, 149-51  
Seno, 43-45, 57, 239  
arco seno, 57, 107, 114  
comparação de ângulo com o, 76-77  
derivadas, 98-100  
limites e, 82  
Sequências e séries, 170, 239  
Sigma, 170  
Sinal de Integral, 141, 178, 181  
Somatória, 28, 169-71, 175  
derivadas e, 92, 171  
Substituição de variáveis, 204-06  
integrais definidas, 207-208  
Superfície, integrais de, 239

## T

Tangente, 43-44, 155, 161  
arco tangente, 58, 107, 114  
derivadas e, 106  
Taxas relacionadas, 115-22, 151  
problemas para resolver, 132  
Taylor, Polinômio de, 162  
Tempo, 9, 11, 13-15, 62, 95  
Tentativa e Verificação, método, 181, 205  
Teorema de Pitágoras, 131  
Teorema do Valor Extremo, 165  
Teorema do Valor Médio, 161  
Teorema Fundamental do Cálculo, 193, 195-202, 204  
problemas para resolver, 202  
Versão 1, 195-97  
Prova do, 200-01  
Versão 2, 198-99  
Termos, 170  
Trabalho, 234  
Trigonométricas (circulares), Funções, 43-45  
derivadas de, 114-15  
inversas, 57-59  
limites e, 66  
Tubulação, exemplo, 148-49  
V  
Variação, 9-18, 144, 161, 199  
derivada de função e, 75-76, 84, 91  
Variáveis, 22

aleatórias, 233  
complexas, 239  
múltiplas, 239  
substituição de, 204-06  
    integrais definidas, 207-08  
Velocidade, 9-18, 62, 136, 138, 195, 215-16  
    aceleração e, 144-45  
    derivadas e, 85-87, 89-90, 93, 95  
    escalar, 9-18  
    encontra a posição a partir da, 172-75  
    força e, 238

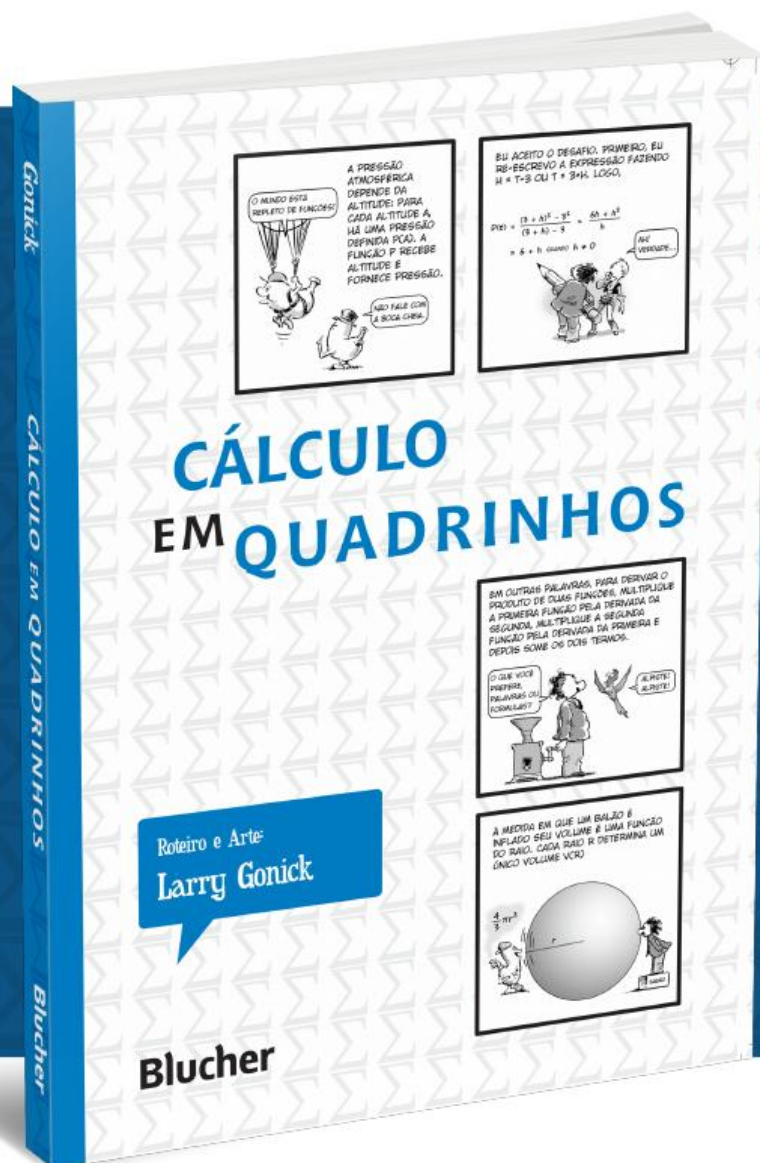
Velocímetros, 12, 14-15, 172-73  
Volume, 129  
    de um cone, 220  
    de um parabolóide, 221  
    de uma esfera, 21-22, 218-20  
    densidade e, 228

## Z

Zeno, 10-11, 18, 94  
Zero, divisão por, 28

NÃO PARE!  
CONTINUE...





Clique aqui e:

**VEJA NA LOJA**

# CÁLCULO EM QUADRINHOS

**Larry Gonick**

ISBN: 9788521208297

Páginas: 256

Ano de publicação: 2014

Peso: 0.425kg